Colegio San Patricio

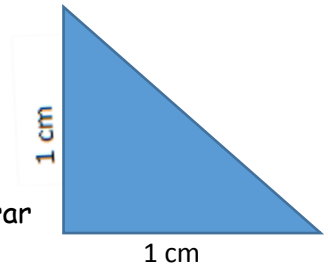
A-019 - Incorporado a la Enseñanza Oficial
Fundación Educativa San Patricio

Matemática 3° año - 2015

Prof. Selva Hernández

Trabajo Práctico N° 2: Números Reales

¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo rectángulo?



Según el teorema de Pitágoras: $h^2 = 1^2 + 1^2$

De donde h= $\sqrt{2}$

Si utilizamos una calculadora científica de diez dígitos para hallar $\sqrt{2}$, al borrar el visor, volver a ingresar 1,414213562 y elevarlo al cuadrado debería dar 2.
Sin embargo, el valor que se obtiene es 1,999999998. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es la expresión exacta y 1,414213562 es un valor aproximado.

En internet pueden obtener más cifras decimales de $\sqrt{2}$:

1,4142135623730950488016887… y observar que la parte decimal NO ES PERIÓDICA, o sea, no ocurre que a partir de cierto lugar un grupo de cifras se repita una y otra vez.

$\sqrt{2}$ es un número IRRACIONAL y, como tal, tiene INFINITAS CIFRAS DECIMALES NO PERIÓDICAS.

> Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como fracción. Su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.
>
> Por eso, se suele mencionar a estos números con el cálculo que los genera o se les asigna un nombre. Ejemplos: $\pi \cong 3{,}141592 \ldots$
>
> $e \cong 2{,}718281 \ldots$ $\qquad$ $\varphi \cong \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

1) Indiquen cuáles de estos números son irracionales (pueden usar calculadora).
   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) 0
   c) $-\sqrt{6}$
   d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
   e) $\sqrt{-6}$
   f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2) Ordenen estos números de menor a mayor:
   - π ;π^2; $\sqrt{5}+3$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-3{,}8$; 0; $\frac{5}{4}$; $\frac{36}{25}$; $\sqrt{2}$
3) Propongan un número irracional y uno racional que estén comprendidos entre los que se dan en cada caso.
   a) 4,9 y 4,99
   b) 0,1 y 0,001
   c) $\sqrt{6}$ y 2,45

d) $-\sqrt{5}\ y - \sqrt{5} + 0{,}01$

4) Se puede demostrar que las raíces enésimas de números enteros que no dan enteras son números irracionales. Indiquen cuáles de los siguientes números son irracionales:

$$\sqrt{3};\ \sqrt[3]{8};\ \sqrt[3]{-1};\ \sqrt{10};\ \sqrt[3]{81};\ \sqrt[4]{81};\ \sqrt[5]{-100};\ \sqrt[7]{7}$$

5) El sabio griego Arquímedes propuso dos aproximaciones de π: $\frac{220}{70}$ y $\frac{223}{71}$ Indiquen en cuál de ellas cometió un error menor y si se trata de errores por defecto o por exceso.

> La manera exacta de expresar un número irracional como $\sqrt{2}$ es, precisamente, escribir $\sqrt{2}$. Cualquier APROXIMACIÓN utilizando un número racional presupone un cierto grado de error.
>
> Se llama ERROR ABSOLUTO a la diferencia entre la aproximación y el valor exacto; si da positivo, se lo llama ERROR POR EXCESO, pues la aproximación es un número mayor al exacto. En caso contrario, se lo llama ERROR POR DEFECTO.

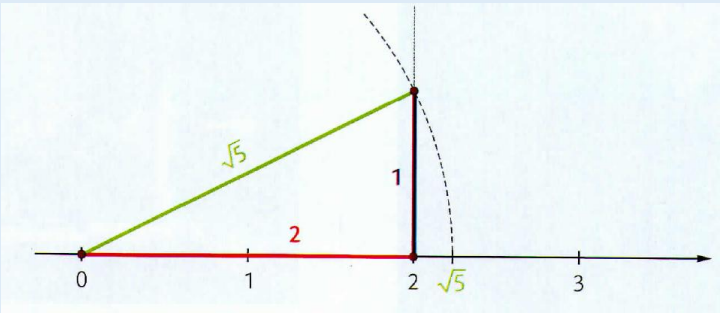
6) El número 0,12345678987654321234… tiene infinitas cifras decimales que siguen el patrón que pueden observar.
   a) ¿Cuáles son los 10 decimales siguientes?
   b) ¿Se trata de un número racional? ¿Por qué?

7) El número 0,123456789101112131415… tiene infinitas cifras decimales que siguen un patrón.
   a) ¿Cuáles son los cinco decimales siguientes?
   b) ¿Se trata de un número racional? ¿Por qué?

8) Consideren los siguientes números, cada uno con infinitas cifras decimales:
   0,202202202202…
   0,20200200020000…
   0,202002022020020200…
   0,202002020002020000…
   a) Indiquen cuáles son racionales y cuáles irracionales.
   b) Ordénenlos de menor a mayor
   c) Inventen un número irracional que pudiera ocupar el segundo lugar en la lista del inciso anterior.

<u>Ubicación en la recta numérica</u>

Hay distintos tipos de números irracionales. En particular, todas las raíces cuadradas de números naturales que no son enteras, son irracionales. Su representación en la recta numérica es sencilla si utilizamos el teorema de Pitágoras.



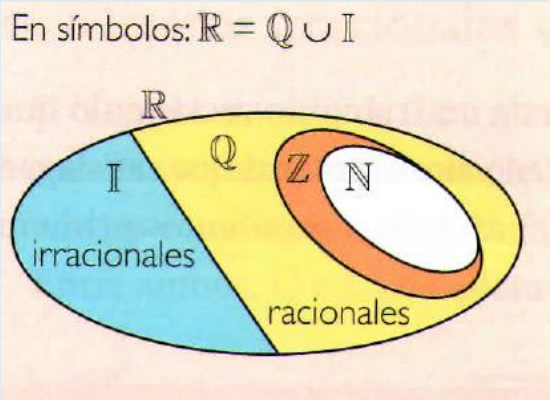
9) Representen $\sqrt{2}$ en la recta numérica. Luego, representen: $-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$

10) Representen en la recta numérica: $\sqrt{7}\ y\ \sqrt{10}$

11) En cada caso, indiquen un número que cumpla con lo pedido:
   a) Que sea racional, mayor que 3,14 y menor que 3,15.
   b) Que sea racional, mayor que 3,14 y menor que π.
   c) Que sea irracional, mayor que 3,14 y menor que 3,15.
   d) Que sea irracional, mayor que 3,14 y menor que π.

12) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? En caso de ser falsas, den un contra ejemplo.
   a) La suma de dos números racionales da como resultado un número racional.
   b) La suma de dos números irracionales da otro número irracional.
   c) La suma de un número racional con un número irracional da un número irracional.
   d) Todas las operaciones anteriores dan como resultado números reales.

El conjunto de los números reales (R) está formado por el conjunto de los racionales (Q) y el de los irracionales (I).



De esta forma, hablamos de la COMPLETITUD de la recta numérica: cada punto de la recta representa un número real y, y todo número real está representado en la recta.

13) En una recta numérica, indiquen:
   a) Los números que son mayores que 2.
   b) Los números que son menores que – 3.
   c) ¿Cómo podrían expresarse ambas situaciones?

Una INECUACIÓN expresa la relación entre dos miembros mediante desigualdades (≤; ≥; <; >).

Por ejemplo: $x \leq 1$

$X - 1 > 5$

14) Escriban las inecuaciones que corresponden a cada intervalo y represéntenlos en la recta numérica.

a) [- 3; 5]
b) [-π; 8)
c) (1; ∞)
d) $(-\infty; 4{,}5)$
e) (- 7; ∞)
f) $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$

15) Escriban el intervalo correspondiente y representen en la recta numérica.

a) $x \geq 5$
b) $-2 \leq x \leq 1{,}5$
c) $x \leq -4$
d) $3 \leq x \leq 9$
e) $-\sqrt{2} \leq x \leq -0{,}5$

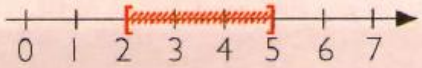
16) Resuelvan las siguientes inecuaciones. Luego, representen la solución como intervalo y en la recta numérica.

a) $4x - 3 \leq 2$
b) $7x + 5 \geq 2 + 4x$
c) $(x-1).(x+1) - (x+1)^2 < 4x + 6$
d) $(x-1)^2 + 2x(3 - 0{,}5x) \leq 1$
e) $(x-2)^2 - x.(x-3) > x + 5$

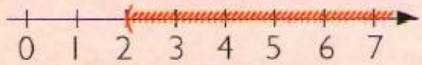
Un **intervalo** de números reales es un subconjunto de la recta real. Por ejemplo:

- el intervalo (2; 5), formado por los x tales que $2 < x < 5$

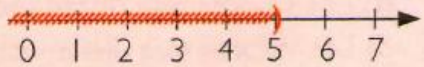
- el intervalo [2; 5], formado por los x tales que $2 \leq x \leq 5$



- el intervalo (2; +∞), formado por los x tales que $2 < x$



- el intervalo (−∞; 5), formado por los x tales que $x < 5$



Cuando el intervalo incluye un extremo se lo indica con un corchete; si lo excluye, se lo indica con un paréntesis.