FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Comprueba en cada caso si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x+2}{3x+6}$ y $\frac{1}{3}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2}$ y $\frac{x+1}{x}$

c) $\frac{3x}{x^2-x}$ y $\frac{3}{x-2}$ d) $\frac{3x-3}{9x^2-9}$ y $\frac{1}{3x-3}$

Sol: a) Sí; b) Sí; c) No; d) No

2. Calcula:

a) $\frac{1}{3x}+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x}$ b) $\frac{2}{3x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^2}$ c) $\frac{3}{x}-\frac{x}{x-1}$ d) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

Sol: a) $\frac{5}{6x}$; b) $\frac{4x+3}{6x^2}$; c) $\frac{-x^2+3x-3}{x(x-1)}$; d) $\frac{2}{x^2-1}$

3. Saca factor común y luego simplifica:

a) $\frac{5x+5}{3x+3}$ b) $\frac{x^2-3x}{2x-6}$ c) $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ d) $\frac{12x}{4x^2+2x}$

Sol: a) 5/3; b) x/2; c) $\frac{x}{x-1}$; d) $\frac{6}{2x+1}$

4. Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ b) $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ c) $\frac{x^2-4}{2x-4}$ d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

e) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$ f) $\frac{x(x+2)}{x^2+4x+4}$ g) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-9}$ h) $\frac{x^2-9}{x^4-81}$

Sol: a) x-1; b) $\frac{x+1}{x-1}$; c) $\frac{x+2}{2}$; d) $\frac{x+2}{x-2}$; e) $\frac{x-4}{x+4}$; f) $\frac{x}{x+2}$ 1; g) $\frac{x-3}{x+3}$; h) $\frac{1}{x^2+9}$

5. Descompón en factores el dividendo y el divisor y después simplifica:

a) $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$ b) $\frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2}$ c) $\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$

Sol: a) $\frac{x}{x-2}$; b) $\frac{x+3}{x^2}$; c) $\frac{x^2+x}{x-2}$; d) $\frac{x+3}{x+5}$;

6. Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{4}{x}-x\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{x+2}{(x+2)^2}\cdot\frac{x^2-4}{x}$

c) $\left[\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right):\left(x-\frac{1}{x+1}\right)\right]\cdot x$

d) $\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}:\frac{1}{x+2}\right)$ e) $\left(\frac{3}{x^2}+\frac{x+2}{x}-\frac{x+1}{x-2}\right)\cdot 2x^2$

Sol: a) 4-2x; b) $\frac{x-2}{x}$; c) 3x+2; d) x^2+2x; e) $-\frac{x^2+x+2}{x^2\,(x-2)}$

7. Reduce a una sola fracción y resuelve:

a) $-\frac{x^2}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0$ b) $\frac{x+3}{x^2-2x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}=0$

c) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+2}=0$

Sol: a) x=2, x=0; b) x=3, x=-1/3; c) x=0

8. Haz las operaciones indicadas y simplifica:

a) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$ b) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\frac{2xy}{x+y}$

c) $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x+1}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$

Sol: a) 4; b) $\frac{4y}{x+y}$; c) $\frac{3x+1}{x}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1+x}{x-3}-\frac{x}{x+2}=\frac{3x+5x^2}{x^2-x-6}$ b) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2}{x^2+2x+1}=\frac{x+2}{x+1}-2$ d) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{7x+2}{x^2-4}$

Sol: a) x=1, x=-2/5; b) x=0, x=-1/2; c) x=-4; d) x=3, x=0

10. Opera:

a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{x-1}{x^2-4x+3}$ b) $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x-2}$

c) $\frac{x}{x^2-x-2}-\frac{3}{x+1}-\frac{x-1}{x^2-3x+2}$ d) $\frac{x}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}-\frac{x+2}{x^2+x-2}$

Sol: a) $\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{3x+4}{x^2+x-2}$; c) $\frac{-3x+5}{x^2-x-2}$; d) $\frac{2-3x}{x^2-1}$

11. Simplifica:

a) $\dfrac{\dfrac{9+6x+x^2}{9-x^2}\cdot\dfrac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\dfrac{2x-4}{3/4+2/8}:\dfrac{2x^2-8x+8}{x-2}}$ b) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-5x+4}\cdot\frac{x-2}{x^2-4}+\frac{x^3-2x}{x^2-4x}$

c) $\dfrac{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{4x^2-4x}{x+1}}{\dfrac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x}:\dfrac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}}$ d) $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\dfrac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\dfrac{2x+2}{x^2+x-2}:\dfrac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$

e) $\dfrac{\left(\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right):\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}}{\dfrac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6}-\dfrac{3x^2+12x+12}{2x}}$

f) $\dfrac{1+\dfrac{x-3}{x+3}}{\dfrac{3-x}{3x}}-\dfrac{\dfrac{x+3}{x}-\dfrac{x+3}{3}}{\dfrac{x+3}{x-3}-1}$

g) $\left(\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2+x}-\dfrac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x}\right):\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x}$

h) $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x^2-y^2}{xy-y^2}}$

i) $\dfrac{\dfrac{a^2-1}{a^2+1}-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}}{\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a-1}}:\left(\dfrac{a^2+1}{a}-\dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^2}\right)$

j) $\dfrac{1+\dfrac{a+b}{a-b}}{1-\dfrac{a+b}{a-b}}$

Sol: a) 1; b) $\dfrac{x^4+2x^3+5x^2+10x+18}{(x-1)(x-4)(x+2)}$; c) 1; d) 1; e) 1; f) $\dfrac{x(x-3)}{3}$; g) 1;

h) 1; i) $\dfrac{a^2}{(a^2+1)^2}$; j) $-\dfrac{a}{b}$

12. Simplifica:

a) $\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-9}:\dfrac{a^2+9}{a^4-81}$

b) $\dfrac{2a^2-4ab+2b^2}{3x-6}:\dfrac{a-b}{4x-8}$

c) $\dfrac{16-x^4}{4x+8}:(32-8x^2)=$

d) $\dfrac{16-x^4}{4x+8}:(32+8x^2)=$

e) $\dfrac{\dfrac{36}{x+y}}{\dfrac{6}{x-y}}:\dfrac{\dfrac{3x}{x+y}}{\dfrac{1}{x^2-y^2}}=$

f) $\dfrac{x^2-4}{a^2-b^2}:\dfrac{x-2}{a+b}=$

g) $\dfrac{2y}{y-1}-\dfrac{y-1}{3y}-\dfrac{3-y}{y}=$

h) $\dfrac{y}{y-2}-\dfrac{y}{y^2-3y+2}-\dfrac{y}{y-1}=$

Sol: a) $(a+3)^2$; b) $8(a-b)/3$; c) $\dfrac{4+x^2}{32(x+2)}$; d) $\dfrac{2-x}{32}$; e) $\dfrac{2}{x(x+y)}$;

f) $\dfrac{x+2}{a-b}$; g) $\dfrac{2(4y^2-5y+4)}{3y(y-1)}$; h) 0

13. Opera y simplifica cuando sea posible:

a) $\dfrac{3+x}{3-x}-\dfrac{1}{-x-3}-\dfrac{x^2}{9-x^2}=$

b) $\dfrac{1}{y^2-y}+\dfrac{2y+1}{y^2-1}+\dfrac{y}{y+1}=$

c) $\dfrac{\dfrac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-4x+8}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-5}}{\dfrac{x+2}{3-x}\cdot\dfrac{6x-2x^2}{2x^2-4x}}=$

d) $\dfrac{x^4-3x^3}{x^4-6x^3+9x^2}=$

e) $\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+x^2-8x-4}=$

f) $\dfrac{2x+6}{x^2-3x}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x-1}{2x-6}=$

Sol: a) $\frac{5x+12}{(x+3)(3-x)}$; b) $\frac{y^3+y^2+2y+1}{y(y-1)(y+1)}$; c) 1; d) $\frac{x}{x-3}$; e) $\frac{1}{x-2}$; f) $\frac{x^3-x-12}{2x(x-3)(x-1)}$

14. Divide y comprueba:
a) $z^5-2z^4-3z^3+6z^2+2z-4:z^2-2$
b) $x^5-3x^2-1:x^2-1$
c) $y^6-3y^4+3y^3+2:y^3-y+1$
Sol: a) z^3-2z^2-z+2; b) C:x^3+x-3, R:$x-4$; c) C:y^3-2y+2, R:$-2y^2+2y$

15. Halla a para que $x^3-ax+125$ sea divisible entre $x+5$. Sol: a=0

16. Hallar el valor que toma el polinomio $p(x) = x^2-6x+1$ para x=2-%. Sol: 2%-5

17. Opera y simplifica:

a) $\frac{x-1}{x^2+2x+1} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$

b) $\frac{x}{x^2-x} + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2-1} =$

c) $\frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$

d) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} =$

e) $\frac{1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} =$

f) $\frac{x-1}{x^2+x} - \frac{3(x-1)}{x} + \frac{2x}{x+1} =$

g)2

h) $\frac{x+2}{x^2-x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3x}{x^2-1} =$

Sol: a) $\frac{-x^3-3x}{(x^2+2x+1)(x-1)}$; b) $\frac{3x+1}{x^2-1}$; c) $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$; d) $-\frac{x}{x^2-1}$; e) $\frac{-x-3}{x^2-1}$;
f) $\frac{-x^2+x+2}{x^2+x}$; g) 1; h) $\frac{2x^2+x+2}{x(x^2-1)}$

18. Opera y simplifica si es posible:

a) $\dfrac{\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}} =$

b) $\dfrac{\frac{x^2-2x+1}{x-1}-\frac{x^2-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}} =$

c) $\dfrac{\frac{2x-2x^2}{(x+1)^2}-\left(\frac{x^2+3x+2}{(x-1)^2}-\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)}{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}+\frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}} =$

d) $\dfrac{\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{x^2+2x+1}{x+1}}{\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x^2+x-6}} =$

e) $\frac{x^2+2x-3}{x-1} + \frac{3x+1}{2x} - \frac{x^2-2x+1}{3x} =$

f) $\dfrac{\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}-\frac{x^2-x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x^2+2x+1}{x+1}} =$

g) $\frac{x-1}{x-1} + \frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1} =$

h) $\frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{3}{(x-1)^2} =$

Sol: a) -x; b) 0; c) $\frac{x^3-3x^2-x-3}{x^2+3}$; d) $\frac{x\,(x+3)\,(x^2-3x+2)}{2}$; e) $\frac{4x^2+31x+1}{x^2+3}$;
f) $\frac{-x^2+2x-2}{x^2}$; g) $\frac{x^2+4x+11}{(x+3)\,(x+1)}$; h) $\frac{2x^3-3x^2-4x-1}{(x^2-1)\,(x-1)}$

19. Opera y simplifica:

a) $\frac{\frac{x^2+3x+2}{x+2}}{(x+2)(x+1)}=$

b) $\frac{x^2-1}{x+2}+\frac{3x-3}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+5x+6}=$

c) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+5x+6}=$

d) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{3x-3}{x+3}+\frac{2x-2}{x+2}=$

e) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+2}{x+1}=$

f) $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{2x}{x-1}=$

Sol: a) $\frac{1}{x+2}$; b) $\frac{x^3+6x^2+x-6}{x^2+5x+6}$; c) $\frac{2x^2-6}{x^2+5x+6}$; d) $\frac{3\,(x-1)}{(x+3)\,(x+2)}$; e) $\frac{x^2+6x+1}{(x+3)\,(x+1)}$;
f) $\frac{2x^2+5x-5}{x^2-1}$

20. Opera y simplifica:

a) $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}=$

b) $\frac{3x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}=$

c) $\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}}{\frac{x+5}{x-5}}=$

d) $\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}}=$

e) $\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}}=$

f) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2-1}=$

Sol: a) $\frac{x+5}{x+1}$; b) $\frac{2x^2-x+3}{x^2-1}$; c) $\frac{x-5}{x+1}$; d) 1; e) $\frac{x+5}{x-5}$; f) $\frac{2x^2}{(x-1)^2\,(x+1)}$