Colegio San Patricio

Matemática 3° año - 2015

Prof. Selva Hernández

Trabajo Práctico N° 9 : Factorización de polinomios.

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores irreducibles. El concepto es análogo al de descomposición de un número en factores primos. Por ejemplo, el número 30 puede descomponerse en factores así: 30=2.3.5

Los polinomios que pueden factorizarse presentan características según las cuales se agrupan en diferentes casos.

Factor común:

Este caso se aplica cuando en todos los términos de un polinomio figura uno o varios factores repetidos.

El resultado es el producto entre esos factores y el polinomio que resulta de dividir cada término por ese factor.

Para encontrar los factores repetidos procedemos de la siguiente manera:

• De los coeficientes se busca el máximo común divisor.

• De las letras se busca la que esté repetida en todos los términos con el menor exponente que figura en el polinomio.

Ejemplo 1: $P(x) = 3x^2 - 6x^4 + 9x^3 - 12x$

El máximo común divisor de los números es 3 y la letra repetida con el menor exponente es x, por lo tanto el factor común es 3x.

Luego:

$3x^2 - 6x^4 + 9x^3 - 12x = 3x.(x - 2x^3 + 3x^2 - 4)$

Ejemplo 2: $16x^2 + 8x^3 - 4x = 4x.(4x + 2x^2 - 1)$

1) Extrae factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $36x^2 - 27x^4 =$
b) $-12x^3 + 9x^2 - 6x =$
c) $18x^3 + 6x^2 + 9x =$
d) $12x^3 + 8x^2 - 20x =$
e) $3x^3 + 21x^4b + 18x^5 - 9x^6 =$
f) $5yx^8 + 10y^4x^5 + \frac{5}{2}y^3x^2 =$

Factor común por grupos de igual número de términos:

Para factorear un polinomio que tiene factores comunes en grupos de igual número de términos, se factorean dichos grupos y luego se factorean nuevamente con respecto a un nuevo factor común que aparece entre paréntesis.
Ejemplo:

$P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$

Primero armamos los grupos (tomando aquellos términos que tengan algún factor en común) y los encerramos entre paréntesis:

$(x^4 - 3x^3) + (x - 3)$

En cada grupo sacamos factor común

$x^3 (x - 3) + 1 (x - 3)$

Volvemos a sacar factor común, ya que el paréntesis aparece en ambos términos:

$(x - 3). (x^3 + 1)$

Obteniendo así el resultado final: $x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3). (x^3 + 1)$

2) Extrae factor común por grupos:

a) $x^3 - 5x - 3x^2 + 15 =$

b) $12x^3 - 8x^2 - 3x + 2 =$

c) $10x^3 - 8x^2 + 15x - 12 =$

d) $24a^2x^5 + 18a^3x^4 - 30ax^2 =$

e) $a^2 + ab + ax + bx =$

f) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2 =$

Trinomio cuadrado perfecto:

Sabemos que al resolver el cuadrado de un binomio se obtiene un trinomio llamado **trinomio cuadrado perfecto: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

De acuerdo con la definición de cuadrado de un binomio resulta que en el trinomio cuadrado perfecto, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el término restante es el doble producto de las bases de los cuadrados.

Si tenemos un polinomio de tres términos, y reconocemos en él el formato anterior, entonces se puede factorear escribiéndolo nuevamente como potencia

Ejemplo: $x^2 + 4x + 4$

Para factorearlo debemos reconocer en él, el formato del trinomio cuadrado perfecto:

$a^2 + 2ab + b^2$

Buscamos dos términos que sean cuadrados perfectos y le sacamos la raíz cuadrada

$a^2 = x^2$ entonces $a = x$

$b^2 = 4$ entonces $b = 2$

Verificamos ahora si el término restante es el doble producto de a por b:

$2\,a\,b = 2 \times 2 = 4x$

Esto significa que el polinomio dado sí tiene la forma de trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se puede factorear: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

3) Analiza si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos. Si lo son, factorízalos.

a) $1 + 18x + 81x^2 =$

b) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1 =$

c) $9 - 30x + 25x^2 =$

d) $\frac{1}{9}x^2 + 16 + 8x =$

e) $\frac{9}{25} + 4x^4 - \frac{12}{5}x =$

f) $4x^2 + 4x + 1 =$

g) $\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 9 =$

<u>Cuatrinomio cubo perfecto:</u>

Recordemos que el cubo de un binomio da por resultado un cuatrinomio llamado cuatrinomio cubo perfecto: $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$

Este caso es similar al anterior, sólo que el polinomio dado debe ser un cuatrinomio y el resultado del factoreo debe ser el cubo de un binomio.

Ejemplo:

$x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 8$

Debemos reconocer en el polinomio dado el formato $a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$ para ello buscamos dos términos que sean cubos perfectos y les sacamos la raíz cúbica

$a^3 = x^3$ entonces $a = \sqrt[3]{x^3} = x$

$b^3 = 8$ entonces $b = \sqrt[3]{8} = 2$

Verificamos ahora si los dos términos restantes responden al formato $3\,a^2 b$ y $3\,a\,b^2$

$3\,a^2 b = 3\,(x)^2\,2 = 6\,x^2$

$3\,a\,b^2 = 3 \times (2)^2 = 12x$

Comprobamos que efectivamente sí tiene el formato indicado, por lo tanto:

$x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 8 = (\,x + 2\,)^3$

4) Analiza si los siguientes cuatrinomios son cubos perfectos. Si lo son, factorízalos.

a) $-x^3 - 9x^2 - 27x - 27 =$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 =$

c) $x^3 + 64 - 12x^2 - 48x =$

d) $\frac{27}{64}x^3 + \frac{27}{16}x^2 + \frac{9}{4}x + 1 =$

e) $\frac{1}{8} - \frac{9}{4}x + \frac{15}{2}x^2 - 125\,x^3 =$

<u>Diferencia de cuadrados:</u>

Recordemos que $(a+b).(a - b) = a^2 - b^2$

Por el carácter recíproco de esta propiedad, si tenemos un binomio que tenga la forma $a^2 - b^2$ podemos factorearlo escribiendo $(a+b).(a - b)$

Ejemplo:

$P(x) = x^2 - 9$

Si $a^2 = x^2$ entonces $a = x$

$b^2 = 9$ entonces $b = 3$

este polinomio tiene la forma de diferencia de cuadrados por lo tanto su factorización es:

$x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$

5) Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $49x^2 - 100 =$

b) $x^8 - 1 =$

c) $(x + 1)^2 - 4 =$

d) $x^2 - 2 =$

e) $4x^2 - \frac{9}{25} =$

f) $16x^4 - 1 =$

<u>Suma o diferencia de potencias de igual grado:</u>

$x^n + a^n$ es divisible por $x+a$ si n es impar

$x^n + a^n$ no es divisible por $x - a$

$x^n - a^n$ es divisible por $x+a$ si n es impar

$x^n - a^n$ es divisible por $x - a$ siempre

Esto significa que si dividimos por ejemplo $x^n + a^n$ por $x + a$ siendo n impar, el resto de la división es cero.

Por lo tanto el polinomio $x^n + a^n$ puede expresarse como el producto entre el divisor x+a y el cociente de dicha división.

Es decir si P(x) : Q(x) = C(x) con R(x) = 0 entonces P(x) = Q(x) . C(x)

Entonces por ejemplo, dado el polinomio $\mathbf{x^3 + 8 = x^3 + 2^3}$ sabemos que es divisible por la suma de las bases (x+2). Por lo tanto, se puede factorear multiplicando el divisor (x+2) por el cociente de la división entre ellos.

Pero ahora debemos encontrar el cociente, para eso aplicamos la regla de Ruffini:

$(x^3 + 8) : (x+2)$

	1	0	0	8
-2		-2	4	-8
	1	-2	4	0

$C(x) = x^2 - 2x + 4$ Por lo tanto: $\mathbf{(x^3 + 8) = (x+2).(x^2 - 2x + 4)}$

6) Factoriza, si es posible, las siguientes sumas o diferencias de potencias de igual grado:

a) $x^3 - 64 =$

b) $x^4 - 16 =$

c) $x^4 + 81 =$

d) $x^5 + 1 =$

e) $x^3 - 27 =$

f) $x^5 + 32 =$

<u>Combinación de casos de factoreo:</u>

7) Factoriza, si es posible, los siguientes polinomios aplicando los distintos casos:

a) $8x^3 - 60x^2 + 150x - 1125 =$

b) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 =$

c) $6x^3 - 24x^2 + 24x =$

d) $4x^2 - \frac{81}{49}a^2 =$

e) $x^3 - x^2 + 4x - 4 =$

f) $x^4 - \frac{1}{16}b^4 =$

g) $2x^5 - 20x^4 + 50x^3 =$