NUMEROS IRRACIONALES

Conocemos hasta ahora distintos conjuntos numéricos:

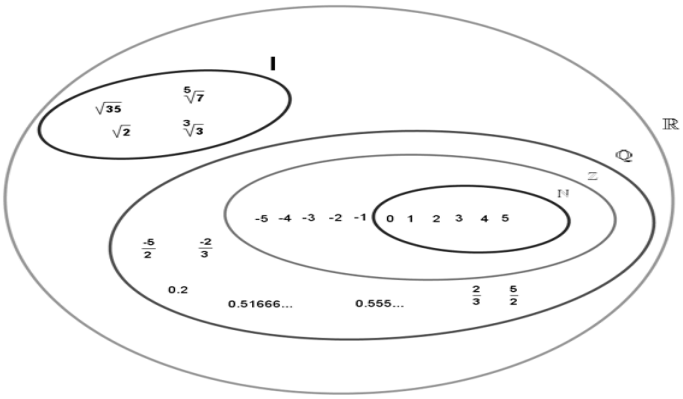
- Los n° naturales: (5, 18, 1.978) , representados por la letra N
- Los n° enteros: (-3, -123, 18, 568), representados por la letra Z
- Los n° racionales (-3, ½, ¼, -¾, 526) representados por la letra Q

Cada uno de estos conjuntos es una ampliación del anterior: $N \subset Z \subset Q$
En definitiva, todo número conocido hasta ahora:

- puede ser escrito como el cociente entre otros dos números enteros (-5, $\frac{23}{39}, -\frac{1}{5}, \frac{519}{99,}$)
- tiene una cantidad finita o infinita periódica de cifras decimales (2,2 ; 1,6̂6; 0,818181…)

No es difícil imaginar la existencia de números con infinitos decimales no periódicos, por ejemplo: 0,123857343769… ó 1,41421356… o π, que, por lo tanto no pueden ser escritos como una fracción. Se llaman **Números Irracionales**, y se designan con la letra I
Existen algunos ejemplos de n° Irracionales "famosos", como:

π = 3.141592653589...(relaciona la longitud de la circunferencia y su radio)
e = 2.718281828459... (n° de Euler: usado en logaritmos)
φ **=** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ("N° de Oro": usado por grandes artistas en las proporciones de sus obras. Se relaciona con la idea de estética y belleza, relaciona desde las proporciones en el rostro, hasta las distancia entre cada rama y cada hoja en un árbol).



La Unión entre los números **Racionales** y los números **Irracionales**, la denominamos **Números Reales**, y la simbolizamos con la letra R.

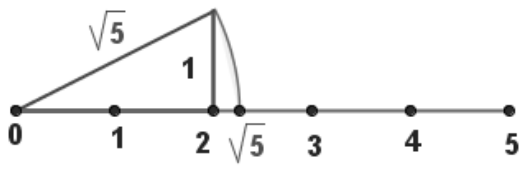
Con los números Reales logramos la idea de "densidad" de la recta numérica.

(Nota: Si al calcular una medida o resolver un ejercicio, obtenemos como resultado un n° Irracional, como por ejemplo $\sqrt{7}$, debemos tener en claro que ése es el valor exacto del n° y así lo dejamos expresado, sin buscar su expresión decimal)

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los **números Irracionales** pueden ser representados en la recta numérica con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.

$\sqrt{5} = 2^2 + 1^2$



Ejercicio 1: Representa en la recta numérica: $\sqrt{17}$ y $\sqrt{13}$

Para trabajar en el conjunto de los N° Irracionales deberemos operar con radicales, y para eso repasaremos algunas propiedades de la Potenciación y de la Radicación.

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN:

X^2 en este caso X recordemos que recibe el nombre de base y 2 es el exponente

* Producto de Potencias de igual base: $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

$$2^5 \cdot 2^2 = 2^{5+2} = 2^7 = 128$$

* Cociente de Potencias de igual base: $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$

$$2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3 = 8$$

* Potencia de otra Potencia: $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

$$[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 64$$

* Potencia de exponente cero: $\mathbf{a^0 = 1}$ $(\forall a \neq 0)$

$$100^0 = 1$$

* Potencia de exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ **($\forall$ a≠0)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

* Distributividad respecto del producto y cociente: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$(a : b)^n = a^n : b^n$

* Distributividad respecto de la suma y la resta:
OJO!!!: La Potenciación **NO ES DISTRIBUTIVA** respecto de la **suma y la resta**

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

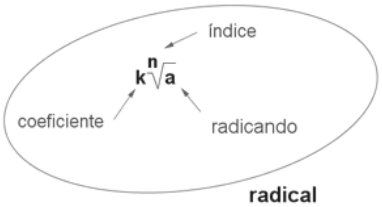
$$(a - b)^n \neq a^n - b^n$$

<u>Ejercicio 2</u>: Resuelve aplicando las propiedades de la potenciación:

a) $5^6.5^3.5 =$ b) $\frac{h^5}{h^4} =$ c) $\frac{a^3}{a^9.b^2} =$ d) $4^a.6^b.4^b.6^a =$

e) $\frac{x^4.y^9}{x^9.y^4} =$ f) $\frac{a^3.a}{a^2.a^5} =$ g) $((k^4)^3)^2 =$ h) $\left(x^3.(x^4)^3\right)^{\frac{6}{5}} =$

<u>PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN:</u>



Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que n $\in \mathbb{N}$ y a $\in \mathbb{R}$; (con la salvedad de que cuando *a* sea negativo, *n* tiene que ser impar).

* Raíz de una potencia o potencia de una raíz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
* Raíz de otra raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
* Producto del índice y exponente por un mismo número: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$
* Distributividad respecto de la multiplicación y división:

$$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b} = \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

* Distributividad respecto de la suma y la resta:
OJO!!!: La Radicación **NO ES DISTRIBUTIVA** respecto de la **suma y la resta**

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Ejercicio 3: Resuelve aplicando las propiedades de la radicación:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{6} =$ b) $\sqrt{\frac{7}{5}.\sqrt{\frac{3}{4}.\sqrt{\frac{1}{3}}}} =$ c) $\sqrt{\sqrt{a}} =$ d) $\sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{6}{5}} =$

e) $\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[3]{x} =$ f) $\sqrt[3]{x.\sqrt{x}} =$ g) $\sqrt{\sqrt[3]{27^2}} =$ h) $\sqrt{a} : \sqrt[5]{a} =$

Ejercicio 4: Resuelve aplicando propiedades:

a) $\frac{2^5}{2^3} + 3^{-1} - \sqrt{2}.\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$ b) $\frac{4}{2^4} - \frac{1}{3^{-1}} + \frac{2^3.4}{32} - \sqrt{\frac{3^7}{3^3}} =$

c) $3^{-2}.\frac{1}{3^3}.3^6 + \sqrt{\sqrt{\frac{625}{81}}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$ d) $\frac{\sqrt{10}.\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 : 2^{-2} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}.\sqrt{8}}{27}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{125.x^9}{64.y^6}} =$ f) $\sqrt[4]{\frac{16.x^{12}}{b^{20}}} =$ g) $\frac{\sqrt{81.\sqrt{64}}}{\left(\sqrt[7]{\sqrt[5]{32.x^5}}\right)^7} =$

EXPONENTES FRACCIONARIOS:

Los radicales se pueden expresar como potencias de índice fraccionario, de modo que el índice de la raíz sea el denominador del exponente, y el exponente del radicando (que puede tenerlo o no), sea el numerador del exponente.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ Ejemplo: $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

SIMPLIFICACIÓN DE ÍNDICES:

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

OJO!!! Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Ejercicio 5: De los siguientes ejercicios, sólo 1 es correcto ¿Cuál?

a) $\sqrt{100+25}$ = 10 + 5 = 15

b) $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2$

c) $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$

d) $\sqrt{(-9).(-4)} = \sqrt{-9}.\sqrt{-4} \notin \Re$

Ejercicio 6: Resolver

a) $\sqrt[3]{(a+b)^{3r}} =$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{729.x^{12}.y^3}{k^6}} =$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{16.x^8.(h+k)^2}{81}} =$

EXTRACCIÓN DE FACTORES FUERA DEL RADICAL:

Cuando los factores que figuran en el radicando son potencias de exponente mayor o igual que el índice de la raíz, podemos extraerlos fuera del radical, aplicando las propiedades vistas.

¿Cómo?

- Expresando el radicando como producto de potencias de igual base, de manera que una de ellas sea múltiplo del índice:

$$\sqrt{a^5} = \sqrt{a^4.a}$$
$$= \sqrt{a^4}\,.\,\sqrt{a}$$
$$\sqrt{a^5} = a^2\,.\,\sqrt{a}$$

ó - Dividiendo el exponente por el índice de la siguiente manera:

el **resto** es el exponente que **queda "adentro"**

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

el **resultado** es el exponente que **queda "afuera"** $\Rightarrow$

$$\sqrt{a^5} = a^2\,.\,\sqrt{a}$$

Ejercicio 7: Extraer todos los factores de las raíces cuando sea posible:

a) $\sqrt{8} =$

b) $\sqrt{16.x^3} =$

c) $\sqrt{0,27} =$

d) $\sqrt{9.a^2.b^6.c} =$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{0,064.a^8.b^{10}}{c^{21}}} =$

f) $\sqrt[3]{125000.a^7.b^{11}.c^2} =$

g) $\sqrt[4]{625.x^5} =$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{512.z^{11}.y^{10}}{x^2}} =$

INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN EL RADICAL:

Cuando aparecen factores fuera del radical, pueden introducirse usando el mecanismo inverso que para extraerlos:

Ej: $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}.\sqrt{5}$

$= \sqrt{3^2.5}$

$= \sqrt{45}$

Ejercicio 8: Escribir las siguientes expresiones dentro de una única raíz

a) $x.\sqrt{5.x^3} =$ b) $4.h^6.\sqrt[3]{k^2} =$ c) $4.\sqrt[3]{2.h^5} =$ d) $k^8.\sqrt[8]{h} =$

SUMA Y RESTA DE RADICALES:

Debemos tener cuidado cuando sumamos o restamos radicales, ya que la única forma es restar o sumar expresiones idénticas (algunas veces, primero será necesario factorear y extraer factores fuera del radical).

Ejemplos: $\sqrt[3]{5} + 8.\sqrt[3]{5} = 9\sqrt[3]{5}$

$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2^3} = \sqrt{2} + 2.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Ejercicio 9: Efectuar las siguientes operaciones (siempre que sea posible):

a) $\sqrt{9x} - \sqrt{25x} + \sqrt{49x} =$ b) $\sqrt[4]{9.y^8} + \sqrt[6]{27.y^{12}} =$

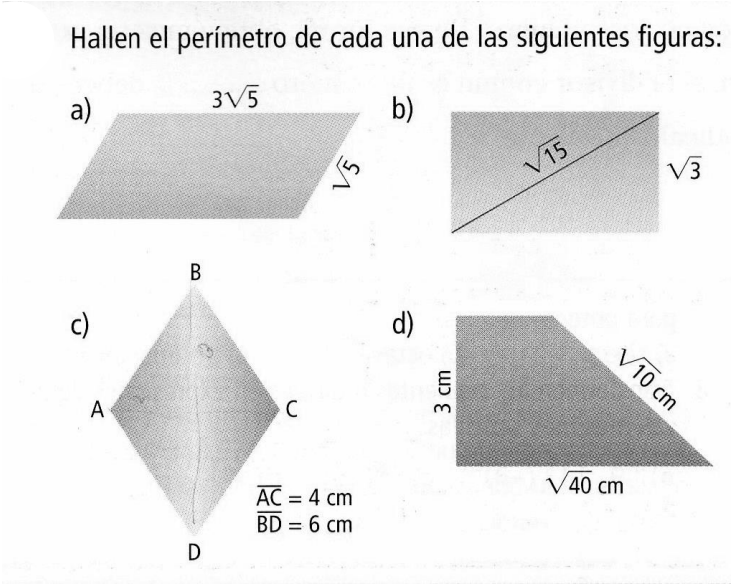
c) $\sqrt{45} + \sqrt{63} - \sqrt{18} =$ d) $3\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{50} =$

e) $\sqrt{81a^3} + \sqrt{9a^3} - \sqrt{25a^3} =$ f) $\sqrt[4]{1296} - \sqrt[4]{4096} + \sqrt[4]{50625} =$

g) $2.\sqrt[3]{81} - 4.\sqrt[3]{24} =$ h) $2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[9]{64} - 4\sqrt[6]{16} =$

i) $\frac{3}{2}.\sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{5}{3}.\sqrt[3]{54} + 5.\sqrt[3]{\frac{2}{125}} =$

Ejercicio 10:



PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES:

- Del mismo índice: se realiza el procedimiento inverso a la propiedad distributiva:

  Ej: $\sqrt{2x}\ \sqrt{xy} = \sqrt{2x.xy}$

  $= \sqrt{2x^2y}$

  $= x.\sqrt{2y}$

- De índices distintos: debemos amplificar las raíces a un mismo índice:

  Ej: $\sqrt{3}\,.\sqrt[5]{2a^2}\,.\sqrt[4]{3a^3}$ = (buscamos el m.c.m entre 2, 4 y 5)

$$= \sqrt[20]{3^{10}}\ .\ \sqrt[20]{2^4a^8}\ .\sqrt[20]{3^5a^{15}} = \sqrt[20]{3^{10}.2^4.a^8.3^5.a^{15}}$$

$$= \sqrt[20]{3^{15}.2^4.a^{23}}$$

$$= a\ \sqrt[20]{3^{15}.2^4.a^3}$$

Ejercicio 11: Realicen las siguientes multiplicaciones y divisiones:

a) $\sqrt[5]{3x^3}.\sqrt{3x} =$ b) $\sqrt[3]{ab^2}.\sqrt[5]{a^2b^3} =$ c) $\sqrt{m}.\sqrt[3]{m^2}.\sqrt[4]{m^3} =$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} =$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{9x}}{\sqrt[4]{27x^2}} =$ f) $\sqrt[10]{\dfrac{4}{5}z}.\sqrt{0{,}4z}.\sqrt[5]{0{,}02z^2}.\sqrt[4]{0{,}01} =$

g) $\sqrt{4x}.\sqrt[3]{4x^2}.\sqrt[6]{16x^3} =$ h) $\sqrt{3xy^3}.\sqrt[6]{3x^5y}.\sqrt[3]{3x^2y} =$ i) $\sqrt[12]{8z^{13}} : \sqrt[4]{2z^3} =$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, es decir, reescribir una expresión conservando su valor, pero sin radicales en el denominador.
Podemos distinguir tres casos:

1er caso: La raíz del denominador es cuadrada: $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$ Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

2do caso: La raíz es de índice mayor a 2: $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$ Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3er caso: En el denominador hay un binomio con, al menos, un radical:

$\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador (es decir el mismo binomio pero con el signo del segundo término cambiado), de manera de poder aplicar diferencia de cuadrados.

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

Ejercicio 12: Racionalicen las siguientes expresiones:

a) $\frac{10}{\sqrt[3]{2}} =$ b) $\frac{2x}{3.\sqrt[3]{x}} =$ c) $\frac{4}{\sqrt[9]{256y^8}} =$ d) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{2x}} =$

e) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$ f) $\frac{\sqrt[5]{216}}{\sqrt[5]{108}} =$ g) $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$ h) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} =$

i) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$ j) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} =$ k) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}} =$ l) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

m) $\frac{12.(\sqrt{3}-5)}{\sqrt{3}+5} =$ n) $\frac{\sqrt{20}}{20+\sqrt{20}} =$ o) $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$ p) $\frac{2.\sqrt{15}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

q) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} =$ r) $\frac{38.\sqrt{2}}{\sqrt[19]{3^5}} =$ s) $\frac{32}{\sqrt[12]{23^5}} =$ t) $\frac{1}{\sqrt[7]{ab^6c^{10}}} =$

Ejercicio13: Resuelvan cada uno de los siguientes cálculos combinados

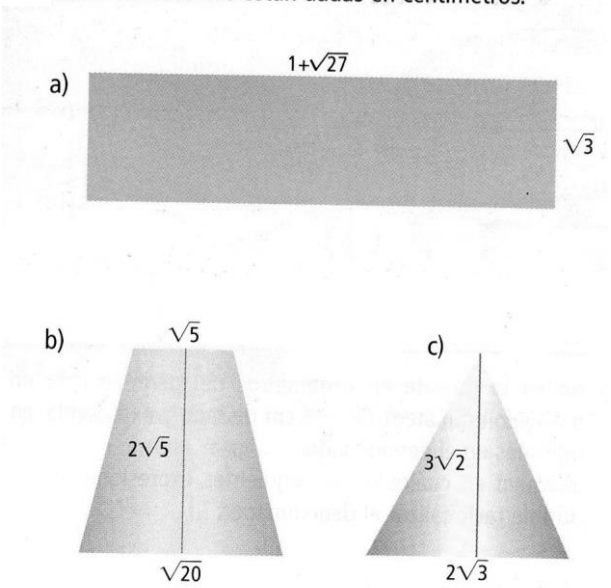
a) $\frac{1}{3}.\sqrt{2}-\frac{2}{1-\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}+1} =$ b) $\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} =$ c) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{-1} =$

d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{2} =$ e) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} =$ f) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}-8}{\sqrt{8}-1}} =$

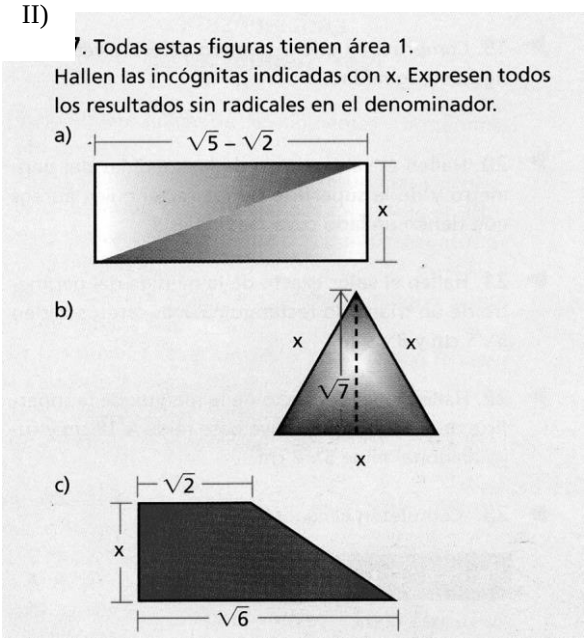
g) $\left(\sqrt{6}.\sqrt[4]{12}\right)^3 : 18^{\frac{1}{2}} =$ h) $5.\sqrt[3]{5} : \sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{-\frac{1}{3}}} =$

Ejercicio 14:

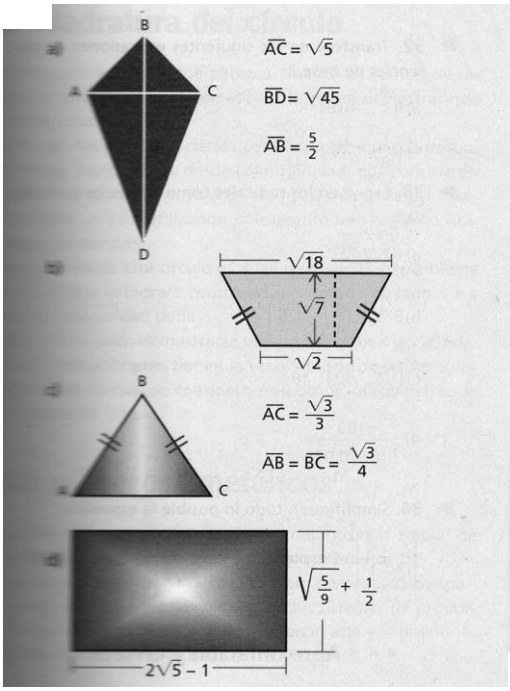
I) Hallen el valor exacto del área de las siguientes figuras
Todas las medidas están dadas en centímetros.



II)



III)



▶ **19**. Comprueben que el número de oro ϕ verifica la siguiente igualdad:
$\phi^2 = \phi + 1$

▶ **20**. Hallen el valor exacto de las medidas del perímetro y de la superficie de los rectángulos áureos que tienen un lado cuya medida es 5.

▶ **21**. Hallen el valor exacto de la medida del perímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $6\sqrt{5}$ cm y $8\sqrt{5}$ cm.

▶ **22**. Hallen el valor exacto de la medida de la superficie de un rectángulo cuya base mide $\sqrt{18}$ cm y cuya diagonal mide $5\sqrt{2}$ cm.

▶ **23**. Completen el cuadro.

p	q	s	p : (−q) + s	q (s − p)	q − p . s
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{6}$			
	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{20}$	$\frac{1}{5}+2\sqrt{5}$		
$-\sqrt{10}$		$-\sqrt{90}$		$-4\sqrt{10}$	