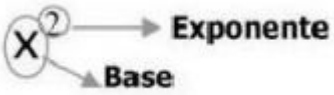
TRABAJO DE POTENCIACIÓN, FUNCIÓN EXPONENCIAL, LOGARITMO Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

- ➔ Cada tema tiene una parte teórica.
- ➔ Pueden usar su propio resumen también.
- ➔ Son 10 ejercicios en total.
- ➔ Es individual el trabajo.

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

I. POTENCIACIÓN



Producto de potencias de igual base: Los exponentes se **Suman** ⇨ $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

División de potencias de igual base: Los exponentes se **Restan** ⇨ $x^a \div x^b = x^{a-b}$

Cuando una variable está elevada a una potencia, y el resultado está elevado a otra potencia: Los exponentes se Multiplican ⇨ $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Nota importante: Fijate que sería lo mismo escribir... $(x^a)^b$ ... que... $(x^b)^a$

Ya que "el orden de los factores no altera el producto"... $(x^a)^b = (x^b)^a = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a}$

∗ **Propiedad Distributiva:** La Potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y división: ⇨ $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$ $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$

OJO !!! : La Potenciación **no es distributiva** respecto de la **suma** y **resta**...

$\cancel{(a+b)^k = a^k + b^k}$

$\cancel{(a-b)^k = a^k - b^k}$

Error !!!

∗ **Exponente igual a cero:** "Cualquier número" elevado a la cero, es igual a 1 (excepto el cero mismo).

Por ejemplo: $x^0 = 1 \quad (\forall\, x \neq 0)$; $100^0 = 1$; $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

∗ **Exponente Negativo:** El exponente negativo "nos da vuelta la expresión".

Por ejemplo: $k^{-1} = \frac{1}{k}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

EJERCICIO 1

$16^{x-2}.8^{2x+3} =$

II. EXPONENTES FRACCIONARIOS

* **Exponentes Fraccionarios:** Las expresiones radicales se pueden expresar como potencias de índice fraccionario, de modo que el índice de la raíz sea el denominador del exponente y el exponente (que puede tenerlo o no) de la variable el numerador del exponente.

$\boxed{\sqrt[a]{(x)^b} = (x)^{\frac{b}{a}}}$ Veámoslo en ejemplos: $\sqrt[4]{(5)^3} = (5)^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{x} = (x)^{\frac{1}{3}}$

EJERCICIO 2

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3$$

III. ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas ecuaciones que contienen la incógnita en algún exponente.
Observen algunos ejemplos de cómo se pueden resolver:

Ej 1:

$$1024 = 8 \,.\, 2^x$$
$$2^{10} = 2^3.2^x$$
$$2^{10} = 2^{3+x}$$
$$10 = 3 + x$$
$$x = 7$$

Ej 2:

$$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$$
$$3^x + 3^x.3^2 = \frac{10}{3}$$
$$3^x.(1+3^2) = \frac{10}{3}$$
$$3^x.10 = \frac{10}{3}$$
$$3^x = \frac{10}{3} : 10$$
$$3^x = \frac{1}{3}$$
$$x = -1$$

Ej 3:

$$\sqrt{5}.\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} = 25^{3x}$$
$$5^{\frac{1}{2}}.(5^{-1})^{2x-4} = (5^2)^{3x}$$
$$5^{\frac{1}{2}-2x+4} = 5^{6x}$$
$$\frac{1}{2} - 2x + 4 = 6\,x$$
$$\frac{1}{2} + 4 = 6\,x + 2\,x$$
$$\frac{9}{2} = 8x$$
$$\frac{9}{16} = x$$

EJERCICIO 3

$2^x + 2^x = 4$

IV. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Es toda función del tipo: $f(x) = k \cdot a^{x}$ → Exponente real

Coeficiente de la función
Es un n° real $\neq 0$

Base de la función
Es un n° real positivo

EJERCICIO 4

Graficar y analizar las siguientes funciones exponenciales:

$f(x) = 2 \cdot 5^{x}$

$h(x) = -2 \cdot 4^{x}$

V. LOGARITMOS

DEFINICIÓN DE LOGARITMO:

$\boxed{\text{Log}_{a}(b) = C} \Longleftrightarrow \boxed{(a)^{c} = b}$

...El logaritmo en base "**a**" de un número "**b**", es el exponente "**c**" al que hay que elevar la base "**a**" para obtener por resultado "**b**".

Es como un círculo: ⇨

Me tiene que dar "**b**"

$\text{Log}_{a}(b) = C$

"**a**" elevado a la "**c**"

a es la base del logaritmo y debe ser real, positivo, y distinto de 1

b es el argumento del logaritmo y debe ser real positivo

Ejemplo:
Calculemos el logaritmo en base 2 de 8: $\text{Log}_{2} 8 = (....)$

O sea que 2 elevado **al resultado de este logaritmo** me tiene que dar 8.

Entonces el resultado de ese logaritmo es **3.**

EJERCICIO 5

$\log_{\frac{1}{2}} 4 =$

VI. LOGARITMOS DECIMALES Y LOGARITMOS NATURALES

Si la base del logaritmo es **10** se llama **logaritmo decimal** y se puede escribir ***log*** sin indicar la base. Si la base es el número **e** (e= 2,718….), se denomina **logaritmo natural** o **logaritmo neperiano** y se escribe ***ln***. Se denomina "neperiano" en honor a John Neper (1550-1617), matemático escocés a quien se atribuye el concepto de logaritmo.
Tanto los logaritmos naturales como los decimales aparecen en las calculadoras científicas.

EJERCICIO 6

$\ln \sqrt{e} =$

VII. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. Definición: $\text{Log}_a(b) = C \Longleftrightarrow a^C = b$

Con a, b y c $\in \Re \wedge a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge b > 0$

✔ Ejemplo: $\log_2(8) = 3 \Longleftrightarrow 2^3 = 8$

2. **El logaritmo de un producto** es la **suma de los logaritmos.**

$\text{Log}_a(X \cdot Y) = \text{Log}_a X + \text{Log}_a Y$

✔ Ejemplo:
$\log(5 \cdot 2) = \log(5) + \log(2)$

3. **El logaritmo de un cociente** es la **resta de los logaritmos.**

$\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a X - \text{Log}_a Y$

✔ Ejemplo:
$\log(5/2) = \log(5) - \log(2)$

4. El logaritmo de una potencia: El exponente pasa a multiplicar como una constante al logaritmo.

$\text{Log } X^Y = Y \cdot \text{Log } X$

$Y \cdot \text{Log } X$

El exponente "BAJA" y queda multiplicando al logaritmo.

✔ Ejemplo:
$\log(10)^2 = 2 \cdot \log(10)$

Nota: al logaritmo de una raíz lo puedo ver como el logaritmo de una potencia fraccionaria.

Ejemplos: $\text{Log } X^3 = 3 \cdot \text{Log } X$ $\qquad$ $\text{Log } (X+1)^{3a} = 3a \cdot \text{Log } (X+1)$

$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log 7$ $\qquad$ $\log_a \sqrt[3]{(5X+1)^2} = \frac{2}{3} \log_a (5X+1)$

EJERCICIO 7

a) $\log_3 5 + \log_3 6$ b) $\log_2 30 - \log_2 15$ c) $\log_4 x^5$

VIII. CAMBIO DE BASE

- **Cambios de base**: $\Rightarrow \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Con "a" y "c" $\in \Re \wedge$ "a" y "c" > 0

Para pasar un logaritmo de base, hago el logaritmo en "base c" de lo que tenía adentro del logaritmo, dividido el logaritmo en "base c" de la base.

✔ Ejemplo:

$$\log_3 5 = \frac{\log_c 5}{\log_c 3}$$

- **Las calculadoras**: Con las calculadoras sólo puedo calcular en forma directa dos tipos de logaritmos:
  - Los de base 10: La tecla "Log" (cuando no se aclara la base de un logaritmo es de base 10).
  - Los de base 2,71 "base e" que se llaman logaritmos naturales o neperianos. En la calcu están como "ln".

Pero esto no significa que yo no pueda calcular el logaritmo de base 7 de 4 con la calculadora.
Veamos como ejemplo dos maneras de hacer **Log $_7$ (4) con la calculadora**:

Paso a base 10	*Paso a base "e"*
$\log_7(4) = \dfrac{\log 4}{\log 7} = \dfrac{0,602}{0,845} = 0,712$	$\log_7(4) = \dfrac{\ln 4}{\ln 7} = \dfrac{1,386}{1,945} = 0,712$

EJERCICIO 8

$log_3 7 =$

IX. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas son las que tienen la incógnita en el argumento de algún logaritmo.
Para resolverlas, debemos tener presente que:

- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades.
- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Ej 1: $\log_2(x+1) = 3$

$2^3 = x+1$

$2^3 - 1 = x$

$7 = x$

Ej 2: $\log_2(x+7) - \log_2(x+1) = 4$

$\log_2 \dfrac{x+7}{x+1} = 4$

$2^4 = \dfrac{x+7}{x+1}$

$2^4(x+1) = x+7$

$16x + 16 = x + 7$

Ej 3: $2.\log_5 x + \log_5(8x) = 3$

$\log_5 x^2 + \log_5(8x) = 3$

$\log_5(x^2 . 8x) = 3$

$\log_5(8x^3) = 3$

$5^3 = 8x^3$

EJERCICIO 9

$\log_3 x + \log_9 (x+1) = ½ .\log_3 x$

$\log x - \log 17 = 0$

X. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Es toda función del tipo: $y = \log_a x$ (Se lee:" logaritmo en base a, de x")

a es la base
Es un n° real positivo

x es el "Argumento"
Es un n° real positivo

Definición de Logaritmo:

$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$ Ej: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

"Encontrar el logaritmo de un n° es encontrar el exponente al que se debe elevar la base, para obtener el argumento"

Ej: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$ / $\log_3 9 = 2$ porque $3^2 = 9$

Observaciones:

- El logaritmo, en cualquier base, de un n° negativo no existe
- El logaritmo, en cualquier base, de 0, no existe
- El logaritmo, en cualquier base, de 1, es 0
- El logaritmo mas usado es el de base 10, y no colocamos la base cuando lo escribimos. Es el único logaritmo que puede realizarse con calculadora. Ej: log 100 = 2 (verificalo)

EJERCICIO 10

$f(x) = \log x$ $g(x) = \log (x-3)$