Colegio San Patricio
A-019 - Incorporado a la Enseñanza Oficial
Fundación Educativa San Patricio

Continuaciòn de temas de la practica del periodo de diagnóstico 2018

I. POTENCIACIÓN

x^2 → **Exponente**
x → **Base**

☆ Propiedades de la Potenciación

Producto de potencias de igual base: Los exponentes se **Suman** ⇨ $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

División de potencias de igual base: Los exponentes se **Restan** ⇨ $x^a \div x^b = x^{a-b}$

Cuando una variable está elevada a una potencia, y el resultado está elevado a otra potencia: Los exponentes se Multiplican ⇨ $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Nota importante: Fijate que sería lo mismo escribir... $(x^a)^b$ ... que... $(x^b)^a$

Ya que "el orden de los factores no altera el producto"... $(x^a)^b = (x^b)^a = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a}$

✶ **Propiedad Distributiva:** La Potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y división: ⇨ $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$ $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$

OJO !!! : La Potenciación **no es distributiva** respecto de la **suma y resta**...

$(a+b)^k = a^k + b^k$

$(a-b)^k = a^k - b^k$

Error !!!

✶ **Exponente igual a cero:** "Cualquier número" elevado a la cero, es igual a 1 (excepto el cero mismo).

Por ejemplo: $x^0 = 1 \quad (\forall\, x \neq 0)$; $100^0 = 1$; $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$

✶ **Exponente Negativo:** El exponente negativo "nos da vuelta la expresión".

Por ejemplo: $k^{-1} = \frac{1}{k}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

II. EXPONENTES FRACCIONARIOS

* **Exponentes Fraccionarios:** Las expresiones radicales se pueden expresar como potencias de índice fraccionario, de modo que el índice de la raíz sea el denominador del exponente y el exponente (que puede tenerlo o no) de la variable el numerador del exponente.

$$\boxed{\sqrt[a]{(x)^b} = (x)^{\frac{b}{a}}}$$

Veámoslo en ejemplos: $\sqrt[4]{(5)^3} = (5)^{\frac{3}{4}}$ $\quad \sqrt[3]{x} = (x)^{\frac{1}{3}}$

III. ECUACIONES EXPONENCIALES:

Son aquellas ecuaciones que contienen la incógnita en algún exponente.
Observen algunos ejemplos de cómo se pueden resolver:

Ej 1:

$$1024 = 8 \,.\, 2^x$$
$$2^{10} = 2^3.2^x$$
$$2^{10} = 2^{3+x}$$
$$10 = 3 + x$$
$$x = 7$$

Ej 2:

$$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$$
$$3^x + 3^x.3^2 = \frac{10}{3}$$
$$3^x.(1+3^2) = \frac{10}{3}$$
$$3^x.10 = \frac{10}{3}$$
$$3^x = \frac{10}{3} : 10$$
$$3^x = \frac{1}{3}$$
$$x = -1$$

Ej 3:

$$\sqrt{5}.\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} = 25^{3x}$$
$$5^{\frac{1}{2}}.(5^{-1})^{2x-4} = (5^2)^{3x}$$
$$5^{\frac{1}{2}-2x+4} = 5^{6x}$$
$$\frac{1}{2} - 2x + 4 = 6\,x$$
$$\frac{1}{2} + 4 = 6\,x + 2\,x$$
$$\frac{9}{2} = 8x$$
$$\frac{9}{16} = x$$

IV. FUNCIÓN EXPONENCIAL:

Es toda función del tipo: $f(x) = k \,.\, a^x$ → Exponente real

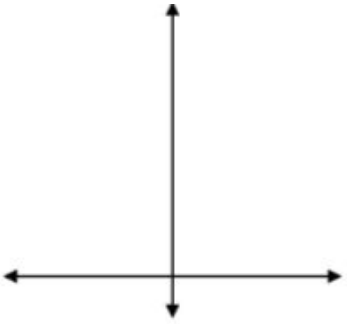
k: Coeficiente de la función — Es un n° real $\neq 0$

a: Base de la función — Es un n° real positivo

Ejercicio 1:

➲Consideremos la función $y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$							



Analicemos la función:

- Dominio: Todos los R
- Imagen: R^+
- Ceros: No tiene, porque.....
- Ordenada al origen: 1

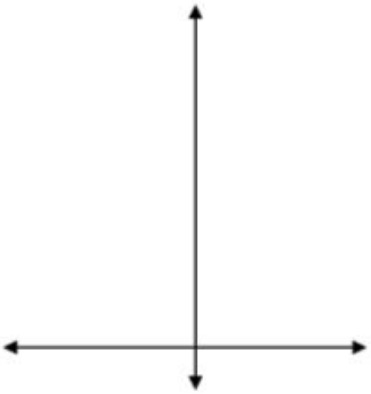
Una característica evidente de esta curva es la rapidez con la que crece. A ese crecimiento vertiginoso se lo llama **crecimiento exponencial**.
Cuando x tiende a $-\infty$, la curva se aproxima cada vez más al eje x, pero nunca llega a tocarlo.
Por eso la recta de ecuación **y = 0** (es decir, el eje x) es su **asíntota horizontal**.

Ejercicio 2:

➲Consideremos ahora, en un mismo gráfico, las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = 4^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 4^x$							



¿Qué tienen en común?

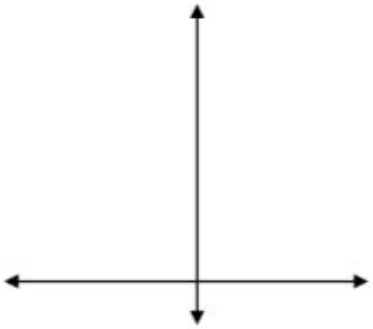
- Tienen Dominio =……
- Tienen Imagen: ……..
- No tienen ceros
- Cortan al eje de ordenadas en (… ; …)
- Tienen asíntota horizontal, que es el eje…….

¿Qué diferencia observan? ……..

Ejercicio 3:

➲Consideremos las funciones $f(x) = 2^x$ y $t(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (½)^x$							



- Dominio:……..
- Imagen:……
- Ceros:……..
- Ordenada al origen: ……..
- Asíntota:……..

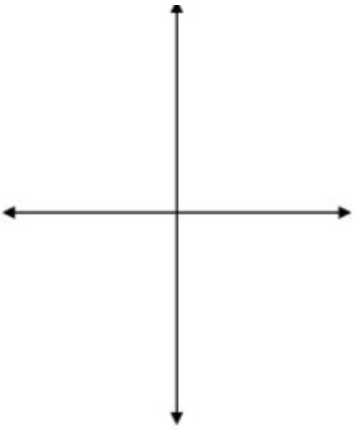
¿Qué diferencia observan?.....

Ejercicio 4:

➲Consideremos ahora: $r(x) = 3 \cdot 2^x$, $s(x) = -3 \cdot 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3 \cdot 2^x$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -3 \cdot 2^x$							



- Dominio:……..
- Imagen:……
- Ceros:……..
- Ordenada al origen: ……..
- Asíntota:……..

¿Qué diferencia observan?.....

……

Conclusiones:

- A medida que la base "crece", la curva se "cierra" cada vez más
- Si $a > 1$, la curva es creciente. Si $a < 1$, la curva es decreciente.
- Las curvas que corresponden a funciones exponenciales de bases recíprocas, son simétricas con respecto al eje y
- Las curvas que corresponden a funciones exponenciales que tienen igual base y coeficientes opuestos, son simétricas con respecto al eje x.

V. LOGARITMOS

DEFINICIÓN DE LOGARITMO:

$$\boxed{\text{Log}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{C}} \Longleftrightarrow \boxed{(\mathbf{a})^{\mathbf{c}} = \mathbf{b}}$$

...El logaritmo en base "**a**" de un número "**b**", es el exponente "**c**" al que hay que elevar la base "**a**" para obtener por resultado "**b**".

Es como un círculo:

Me tiene que dar "**b**"

$\text{Log}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{C}$

"**a**" elevado a la "**c**"

a es la base del logaritmo y debe ser real, positivo, y distinto de 1

b es el argumento del logaritmo y debe ser real positivo

Ejemplo:
Calculemos el logaritmo en base 2 de 8: $\text{Log}_2 8 = (\ldots)$

O sea que 2 elevado **al resultado de este logaritmo** me tiene que dar 8.

Entonces el resultado de ese logaritmo es **3.**

Por ejemplo: * $\log_2 16 = 4$ (porque $2^4 = 16$) * $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$)

Ejercicio 5:

Por ejemplo: * $\log_2 16 = 4$ (porque $2^4 = 16$) * $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$)

CASOS PARTICULARES:

$\log_b b =$ ..... $\log_b b^2 =$ .....

$\log_b 1 =$ ..... $\log_b \sqrt{b} =$ .....

$\log_b \frac{1}{b} =$ ..... $\log_{\sqrt{b}} b =$ .....

Ejercicio 6:

a) $\log_4 64 =$ b) $\log_3 81 =$ c) $\log_3 \frac{1}{27} =$ d) $\log_{1/2} 1 =$

e) $\log_{10} 1000 =$ f) $\log_2 \frac{1}{4} =$ g) $\log_{\frac{1}{32}} 2 =$ h) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128} =$

VI. LOGARITMOS DECIMALES Y LOGARITMOS NATURALES

Si la base del logaritmo es **10** se llama **logaritmo decimal** y se puede escribir ***log*** sin indicar la base. Si la base es el número **e** (e= 2,718….), se denomina **logaritmo natural** o **logaritmo neperiano** y se escribe ***ln***. Se denomina "neperiano" en honor a John Neper (1550-1617), matemático escocés a quien se atribuye el concepto de logaritmo.
Tanto los logaritmos naturales como los decimales aparecen en las calculadoras científicas.

Ejercicio 7:

a) $\log 10 =$

d) $\ln e =$

Ejercicio 8:

a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$ c) $\log_3 (x+2) = 2$

d) $2 \,.\, \log_4 x = -4$ e) $\log_{12} (2x-6) + 3 = 3$ f) $-3.\log_3 x^2 - 8 = -14$

VII. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1. Definición: $\text{Log}_a (b) = C \Longleftrightarrow a^C = b$

Con a, b y $c \in \Re \wedge a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge b > 0$

✔ Ejemplo: $\log_2(8) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

2. El **logaritmo de un producto** es la **suma de los logaritmos**.

$\text{Log}_a (X \,.\, Y) = \text{Log}_a X + \text{Log}_a Y$

✔ Ejemplo:
$\log(5 \cdot 2) = \log(5) + \log(2)$

3. El **logaritmo de un cociente** es la **resta de los logaritmos**.

$\text{Log}_a \left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a X - \text{Log}_a Y$

✔ Ejemplo:
$\log(5/2) = \log(5) - \log(2)$

4. El logaritmo de una potencia: El exponente pasa a multiplicar como una constante al logaritmo.

$\text{Log } X^Y = Y \,.\, \text{Log } X$

$Y \cdot \text{Log } X$

El exponente "BAJA" y queda multiplicando al logaritmo.

✔ Ejemplo:
$\log(10)^2 = 2 \cdot \log(10)$

Nota: al logaritmo de una raíz lo puedo ver como el logaritmo de una potencia fraccionaria.

Ejemplos: $\text{Log } X^3 = 3 \,.\, \text{Log } X$ $\qquad$ $\text{Log } (X+1)^{3a} = 3a \,.\, \text{Log } (X+1)$

$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log 7$ $\qquad$ $\log_a \sqrt[3]{(5X+1)^2} = \frac{2}{3} \log_a (5X+1)$

Ejercicio 9:

a) $\log_2 (8 \,.\, 32) =$ $\qquad$ b) $\log_3 \left(27 . \frac{9}{81}\right) =$ $\qquad$ c) $\log_4 64^5 =$ $\qquad$ d) $\log_3 \left(\sqrt[3]{81}\right)^5 =$

VIII. CAMBIO DE BASE

- **Cambios de base**: $\Rightarrow$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Con "a" y "c" $\in \Re \wedge$ "a" y "c" > 0

Para pasar un logaritmo de base, hago el logaritmo en "base c" de lo que tenía adentro del logaritmo, dividido el logaritmo en "base c" de la base.

✔ Ejemplo:

$\log_3 5 = \frac{\log_c 5}{\log_c 3}$

- **Las calculadoras**: Con las calculadoras sólo puedo calcular en forma directa dos tipos de logaritmos:
  - Los de base 10: La tecla "Log" (cuando no se aclara la base de un logaritmo es de base 10).
  - Los de base 2,71 "base e" que se llaman logaritmos naturales o neperianos. En la calcu están como "ln".

Pero esto no significa que yo no pueda calcular el logaritmo de base 7 de 4 con la calculadora.
Veamos como ejemplo dos maneras de hacer **Log $_7$ (4) con la calculadora**:

Paso a base 10	*Paso a base "e"*
$\log_7 (4) = \frac{\log 4}{\log 7} = \frac{0,602}{0,845} = 0,712$	$\log_7 (4) = \frac{\ln 4}{\ln 7} = \frac{1,386}{1,945} = 0,712$

Ejercicio 10:

a) $\log_2 18 =$ $\qquad$ b) $\log_3 100 =$ $\qquad$ c) $\log_2 256 =$ $\qquad$ d) $\log_3 5 =$

IX. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas son las que tienen la incógnita en el argumento de algún logaritmo. Para resolverlas, debemos tener presente que:

- Siempre que sea posible, conviene agrupar los logaritmos en uno solo, para lo cual se aplican las propiedades.
- Para despejar una incógnita contenida en el argumento, se aplica la definición de logaritmo.
- Sólo existen logaritmos de números positivos, por lo cual deben descartarse como soluciones los valores que no verifiquen la ecuación original.

Ej 1: $\log_2 (x+1) = 3$

$2^3 = x+1$

$2^3 - 1 = x$

$7 = x$

Ej 2: $\log_2 (x+7) - \log_2 (x+1) = 4$

$\log_2 \frac{x+7}{x+1} = 4$

$2^4 = \frac{x+7}{x+1}$

$2^4 (x+1) = x+7$

$16x + 16 = x + 7$

Ej 3: $2. \log_5 x + \log_5 (8x) = 3$

$\log_5 x^2 + \log_5 (8x) = 3$

$\log_5 (x^2 . 8x) = 3$

$\log_5 (8x^3) = 3$

$5^3 = 8x^3$

Ejercicio 11:

a) $20 \log(x^2 - 15) = 0$

b) $2. \log_7 x - \log_7 (x+6) = 3.\log_7 2$

Ejercicio 12:

a) $\log_x 27 = 3$

b) $\log x - \log 3 = 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (-x+5) = 2$

d) $\log_2 (8.x) + \log_2 (4.x^2) = 8$

X. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Es toda función del tipo: $y = \log_a x$ (Se lee:" logaritmo en base a, de x")

a es la base
Es un n° real positivo

x es el "Argumento"
Es un n° real positivo

Definición de Logaritmo:

$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$ Ej: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

"Encontrar el logaritmo de un n° es encontrar el exponente al que se debe elevar la base, para obtener el argumento"

Ej: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$ / $\log_3 9 = 2$ porque $3^2 = 9$

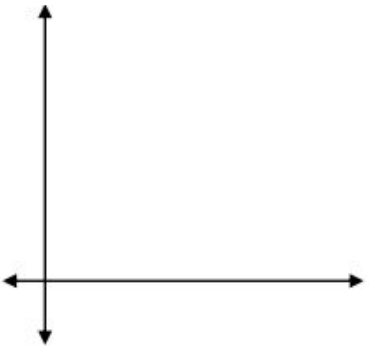
Observaciones:

- El logaritmo, en cualquier base, de un n° negativo no existe
- El logaritmo, en cualquier base, de 0, no existe
- El logaritmo, en cualquier base, de 1, es 0
- El logaritmo mas usado es el de base 10, y no colocamos la base cuando lo escribimos. Es el único logaritmo que puede realizarse con calculadora. Ej: log 100 = 2 (verificalo)

Ejercicio 13:

➲Consideremos la función: $y = \log_2 x$

x	¼	½	1	2	4	8
y = log x						



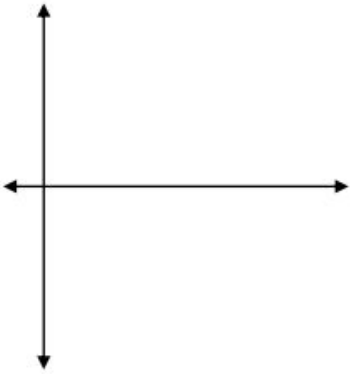
- Dominio: R^+
- Imagen: R
- Ceros: Corta al eje x en (1;0)
- Ordenada al origen: no tiene
- Asíntota Vertical x = 0 (es decir el eje y)

¿Qué observas con respecto a la función exponencial $y = 2^x$?.....

Ejercicio 14:

➲Consideremos, en un mismo gráfico, las siguientes funciones

x	⅓	½	1	2	3	4	5
y = log x							
y = log x							
y = log x							
y = log x							



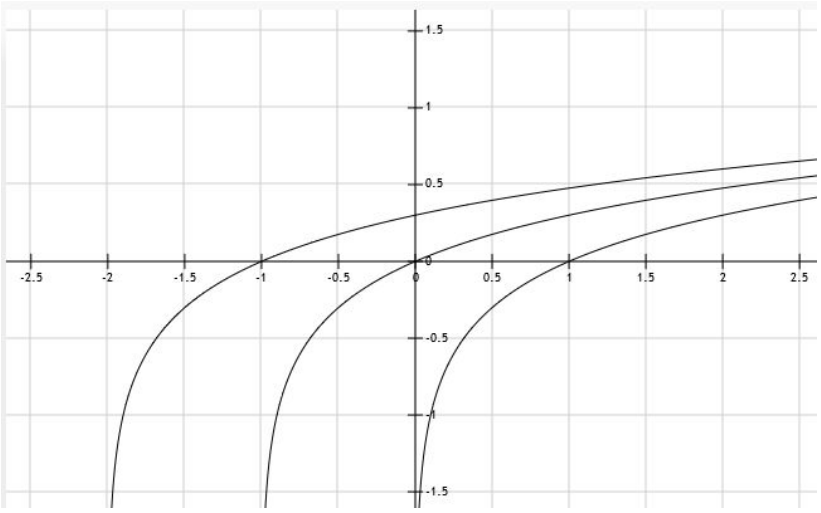
Características comunes:

- Dominio : ……..
- Imagen: …….
- Cortan el eje x en el punto (…;….)
- No tienen ordenada al origen
- Tienen una asíntota …… que es el eje…….

¿Qué diferencias observás?.....

……

Ejercicio 15:



- Imagen:……..
- Ceros:……
- Ordenada al origen:……
- Dominio:……
- Asíntota:……...

Conclusiones:

- La Función Logarítmica es la inversa de la Función Exponencial
- Si a > 1, la función es creciente. Si a < 1, la función es decreciente.
- Si las bases son recíprocas, los gráficos son simétricos con respecto al eje x.
- Si sumamos o restamos un n° al argumento, la curva se desplaza en forma horizontal