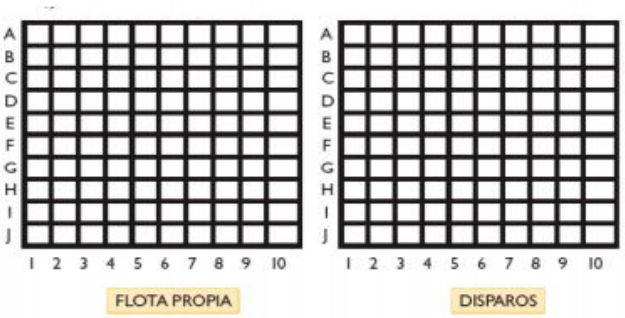
Colegio San Patricio
A-019 - Incorporado a la Enseñanza Oficial
Fundación Educativa San Patricio

TRABAJO PRÁCTICO N° 2
ALUMNO/A:.....

Las funciones describen cómo se relacionan los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Para poder dar una definición más formal de las funciones primero tenemos que mencionar los conceptos de par ordenado, producto cartesiano y aplicación.

Par ordenado: Esta idea la introduciremos a partir del juego de la batalla naval.
Este es un juego de estrategia en el que participan dos jugadores. Se juega con lápiz y papel.
Antes de comenzar el juego, cada participante tendrá dos tableros cuadrados de 10×10 casillas. Las filas horizontales se numeran de la A hasta la J, y las columnas verticales del 1 al 10. Basta con indicar las coordenadas de un disparo con un par número/letra (por ejemplo, 6 ; A o 9 ; J).



Estos disparos, que indican una posición en el mar, son pares ordenados. Se llama **par ordenado** a dos elementos con un cierto orden y se simboliza como:

$$(x, y)$$

Si se invierte el orden de los elementos obtenemos un par ordenado diferente, esto es:

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Producto cartesiano: sean dos conjuntos A y B. Se llama producto cartesiano, $A \times B$, al conjunto de pares ordenados tales que el primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo pertenece a B. En símbolos es:

$$A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in A \ \text{ y } \ y \in B\}$$

Ejemplo: *Siguiendo con el juego de la batalla naval, los conjuntos pueden ser* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *y* $B = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$. *Entonces, el producto cartesiano entre* A *y* B *da las coordenadas de las cien posibilidades de tiro.*

$$\begin{aligned} A \times B \ = \ & \{(1, A); (1, B); (1, C); \ldots; (1, J); (2, A); \ldots; (2, J); \\ & (3, A); \ldots; (3, J); \ldots; (10, A); \ldots; (10, J)\} \end{aligned}$$

EJERCICIO 1

Para los siguientes pares de conjuntos realizá el producto cartesiano.

a) $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{x, y, z\}$

b) $C = \{\text{rojo, amarillo, azul}\}$ y $D = \{\text{blanco, negro}\}$

c) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Aplicaciones

Una aplicación $\mathcal{A}$ que relaciona los elementos del conjunto A con los del conjunto B, que se escribe $\mathcal{A} : A \to B$, es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ (por lo que una aplicación es un conjunto de pares ordenados). Si existe una "regla" o vínculo, $\mathcal{R}$, que permita determinar qué pares ordenados del producto cartesiano son los que pertenecen a la aplicación, entonces se puede escribir:

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A \text{ y } y \in B, \mathcal{R}(x, y)\}$$

Esto se lee: "La aplicación $\mathcal{A}$ es el conjunto que está formado por todos los pares ordenados tales que el primer elemento pertenece al conjunto A, el segundo pertenece a B y satisfacen la relación $\mathcal{R}$."

El conjunto al cual pertenece el primer elemento del par ordenado se llama **conjunto de partida** (en este caso el conjunto A), mientras que al conjunto al cual pertenece el segundo elemento del par ordenado se lo llama **conjunto de llegada** (en este caso el conjunto B). Si el conjunto de partida es igual al de llegada, $A = B$, se dice que la aplicación es una "relación".

Ejemplo 1: *Tomemos los conjuntos A y B de la batalla naval:* $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x \leq 10\}$ *y* $B = \{y \,/\, \text{es una de las primeras diez letras del abecedario}\}$. *Consideremos que estos conjuntos están relacionados por la regla* $\mathcal{R}(x, y) =$ "x es la posición en el abecedario de y".

La aplicación $\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ \mathcal{R}(x, y)\}$ *la podemos representar de cuatro formas equivalentes:*

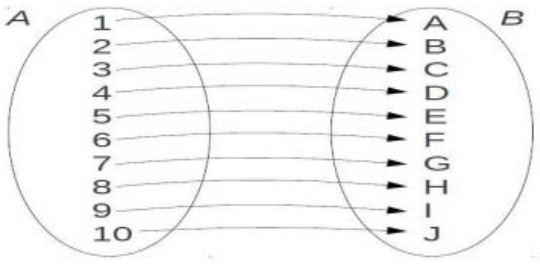
1. *Por comprensión:*

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B \text{ y "}x\text{ es la posicion en el abecedario de }y\text{"}\}$$

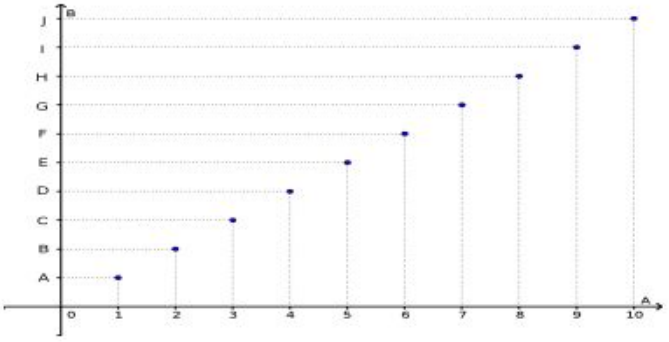
2. *Por extensión:*

$$\mathcal{A} = \{(1, A); (2, B); (3, C); (4, D); (5, E); (6, F); (7, G); (8, H); (9, I); (10, J)\}$$

3. *Con diagramas de Venn:*



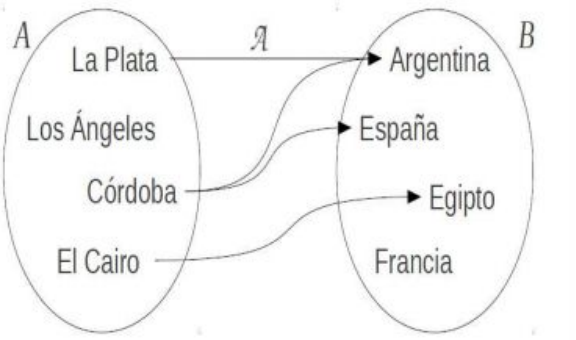
4. *Con un gráfico:*

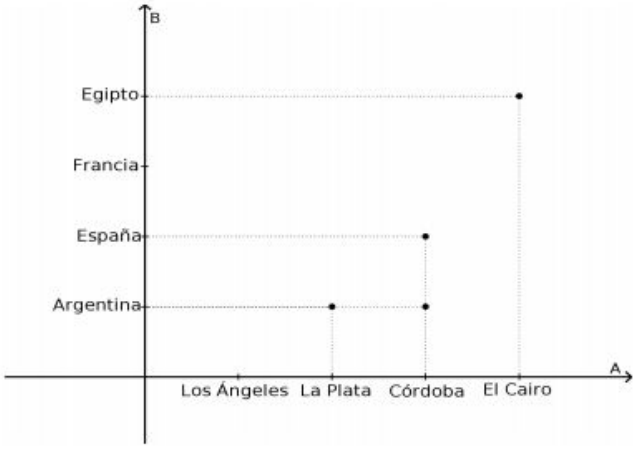


Ejemplo 2: *Sea una aplicación* $\mathcal{A} : A \to B$ *donde los conjuntos* $A = \{$Los Ángeles, La Plata, Córdoba, El Cairo$\}$ *y* $B = \{$Argentina, España, Egipto, Francia$\}$ *están relacionados por la regla* $\mathcal{R}(x, y) =$ "x es una ciudad de y".

La aplicación $\mathcal{A}$ *será:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B \text{ y "}x\text{ es una ciudad de }y\text{"}\} \\ &= \{(\text{La Plata, Argentina}); (\text{Córdoba, Argentina}); (\text{El Cairo, Egipto}); (\text{Córdoba, España})\} \end{aligned}$$





Funciones

Las funciones son un tipo particular de aplicaciones. Una función se define de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B, $f : A \to B$, es una aplicación $\mathcal{A} : A \to B$ tal que **para todo elemento de A existe uno y sólo un elemento de B que le corresponde.**

Es decir que todos los elementos del conjunto de partida deben estar relacionados con uno y sólo un elemento del conjunto de llegada. Por lo tanto ningún elemento de A puede relacionarse con dos o más elementos de B, pero B puede tener elementos que no estén relacionados con elementos de A. En otras palabras, si pensamos en diagramas de Venn, del conjunto A tiene que salir un flecha de cada elemento para que $f : A \to B$ sea función. Notemos que para que una aplicación sea función solamente importa que de todos los elementos del conjunto de partida salga una y sólo una flecha, sin importar con qué elemento del conjunto de llegada se esté relacionando. Como ejemplo veamos qué aplicaciones de los ejemplos dados anteriormente cumplen con la definición de función.

Ejemplos: *Consideremos las aplicaciones dadas en los ejemplos anteriores y analicemos cuáles de ellas cumplen con la definición de función.*

- *Ejemplo 1:*

$$A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ 1 \leq x \leq 10\}$$
$$B = \{y \,/\, \text{es una de las primeras diez letras del abecedario}\}$$
$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B \text{ y "}x\text{ es la posicin en el abecedario de }y\text{"}\}$$

  Es función ya que todos los elementos de A están relacionados con un sólo elemento de B.

- *Ejemplo 2:*

$$A = \{\text{Los Angeles, La Plata, Córdoba, El Cairo}\}$$
$$B = \{\text{Argentina, España, Egipto, Francia}\}$$
$$\mathcal{A} = \{(x, y) \,/\, x \in A,\ y \in B,\ \text{"}x\text{ es una ciudad de }y\text{"}\}$$

  No es función porque Los Ángeles *no está relacionado con ningún elemento y porque* Córdoba *está relacionados con dos elementos.*

EJERCICIO 2

Analizá las siguientes tablas e identifica las que corresponden a funciones.

A	B
m	2
n	1
ñ	4
o	6

C	D
a	0
b	1
c	3
a	5

E	F
1	5
2	5
3	6
4	7

Funciones Matemáticas

De ahora en adelante nos restringiremos a las funciones matemáticas, es decir, a aquellas en las que A y B son conjuntos de números.

Cuando al valor de $x \in A$ le corresponde un valor de $y \in B$ a través de una función $f : A \to B$, lo vamos a simbolizar como $f(x) = y$ (análogamente si a un elemento $a \in A$ le corresponde un valor de $b \in B$, diremos que $f(a) = b$). De este modo podemos utilizar $f(x)$ ó y indistintamente para representar al elemento al que está relacionado x. Así logramos una notación más compacta.

Ejemplo *Sea* $f = \{(x, y) \,/\, x \in A,\, y \in B,\, y = 4x\}$. *Entonces de acuerdo a la nueva notación podemos escribir*

$$f(x) = \begin{cases} f : A \to B \\ f(x) = 4x \end{cases}$$

Ahora vamos a dar una serie de definiciones, para las que vamos a considerar una función matemática $f : A \to B$.

Dominio de una función: Llamamos dominio de f al conjunto de partida, A. Y se denota como:

$$\mathrm{Dom}(f) = A$$

El dominio natural de una función matemática es el máximo conjunto posible para el cual está definida.

Codominio de una función: Llamamos codominio de f al conjunto de llegada, B. Y se denota como:

$$\mathrm{Codom}(f) = B$$

Imagen de una función: Llamamos imagen de f al subconjunto de elementos de B que están relacionados con los elementos del dominio. Es decir:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \,/\, x \in A,\, y = f(x)\} = \{y \in B \,/\, (x, y) \in f\}$$

Notemos que por definición, la imagen de una función está incluída en el codominio, por lo que, en principio, la imagen y el codominio de una función podrían no ser iguales.

Variable independiente o abscisa: Son los elementos del dominio.

Variable dependiente u ordenada: Son los elementos del codominio.

EJERCICIO 3

Determiná el dominio, el codominio y la imagen de las siguientes funciones.

a) $\begin{cases} f(x) : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(z) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ f(z) = 2 - z \end{cases}$

c) $\begin{cases} g(y) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ g(y) = \dfrac{y^2 - 4}{y - 2} \end{cases}$

EJERCICIO 4 (ej. adicional)

¿Cuáles son el dominio, el codominio y la imagen de la siguiente función?. Grafique.

$$\begin{cases} f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x + 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 5

Determinen el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{3+x} - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$

d) $f(x) = \sqrt{x-7}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

EJERCICIO 6 (ej. adicional)

Determiná el dominio natural de las siguientes funciones.

a) $A(x) = 2x - 4$

b) $B(z) = z^2 + 1$

c) $C(r) = \dfrac{r+1}{r-3}$

d) $D(u) = \sqrt{u}$

e) $E(w) = \dfrac{w-2}{w^2-4}$

f) $F(q) = \sqrt{4 - q^2}$

Igualdad de funciones

Diremos que dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son iguales si y sólo si:

1. Tienen el mismo dominio, $A = C$
2. Tienen la misma imagen, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$
3. Tienen la misma regla, $f(x) = g(x)$.

Si a una función determinada:

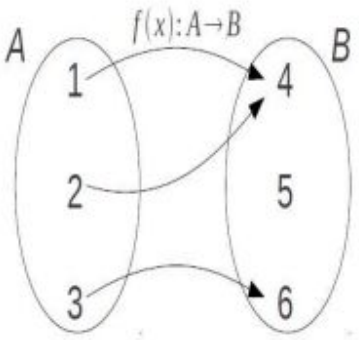
- le modificamos la regla de vinculación (se modifican los pares ordenados);
- le modificamos el dominio; o
- reducimos el codominio modificando la imagen

modificaremos la función. En cambio, si

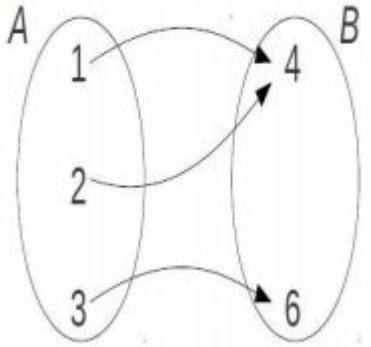
- ampliamos el codominio; o
- reducimos el codominio sin modificar la imagen,

la función no cambia.

Ejemplo: *Tomemos la siguiente función:* $f = \{(1,4); (2,4); (3,6)\}$

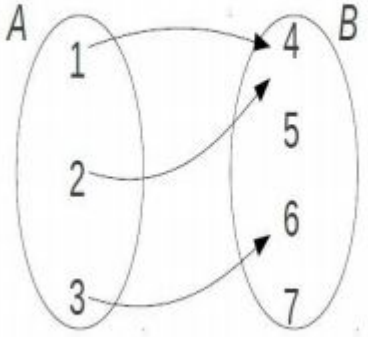


Si reducimos el codominio sin modificar la imagen, la función no cambia



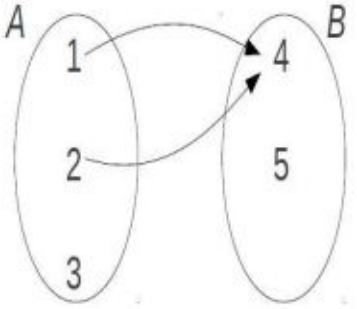
$f_3 = \{(1,4);(2,4);(3,6)\} = f$

Si ampliamos el codominio, la función no cambia.



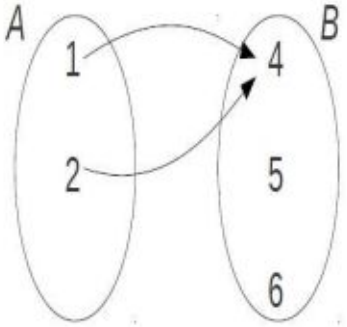
$f_2 = \{(1,4);(2,4);(3,6)\} = f$

Si reducimos el codominio modificando la imagen, se modifica la función (en este caso el resultado no es función).



$f_4 = \{(1,4);(2,4)\} \neq f$

Si modificamos el dominio, modificamos la función.



$f_1 = \{(1,4);(2,4)\} \neq f$

EJERCICIO 7

Dadas las funciones $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)}$$

decir si son iguales. Grafique.

EJERCICIO 8

Consideren las funciones: $f(x) = x + 1$ $\qquad g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

a) Completen la siguiente tabla:

x	3	$\frac{1}{5}$	0	1
F(x)				
G(x)				

b) ¿Son iguales las funciones f y g?

c) Determinen el dominio de cada una de ellas.

EJERCICIO 9 (ej. adicional)

Analizá si los siguientes pares de funciones son iguales justificando tu respuesta.

Sugerencia: * repasá las propiedades de raíz, potencias y logaritmo

a) $A(y) = y - 3$ y $B(y) = \dfrac{y^2 - 9}{y + 3}$

b) $C(z) = \sqrt{z + 2}$ y $D(z) = \sqrt[4]{(z + 2)^2}$

c) $H(w) = |w|^2$ y $J(w) = w^2$

d) $X(y) = (\sqrt{y})^2$ y $Z(y) = \sqrt{y^2}$

e) $P(x) = \log(x^2)$ y $Q(x) = (\log x)^2$

EJERCICIO 10 (ej. adicional)

Dada f(x)= $\frac{3+x}{x-5}$ determinen:

a) F(- 1);

b) F(0);

c) F(2);

d) F($^3/_2$);

Dada g(t)=$\sqrt{1+t^2}$ determinen:

a) G(0);

b) G($\frac{-3}{4}$);

c) G(3)

Las funciones las podemos clasificar en cuatro tipos distintos:

Función inyectiva: Decimos que la función f es inyectiva cuando cada elemento del "codominio" está vinculado a lo sumo con un elemento del dominio. En símbolos es:

$$f \text{ es inyectiva} \iff f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Es decir que para una función inyectiva los elementos del codominio están vinculados con un sólo elemento del dominio o no están vinculados.

Función suryectiva o sobreyectiva: Decimos que la función f es suryectiva o sobreyectiva cuando todos los elementos del codominio están relacionados al menos con un elemento del dominio. En símbolos es:

$$f \text{ es suryectiva} \iff \forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)$$

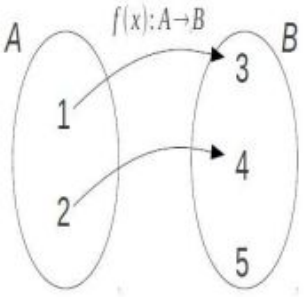
Ahora todos los elementos del codominio deben estar relacionados con uno o más elementos del dominio. En este caso la imagen de f es igual al codominio.

Función biyectiva: Decimos que la función f es biyectiva cuando es inyectiva y suryectiva.

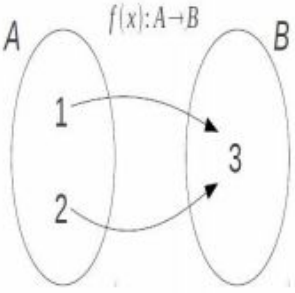
Función no inyectiva y no suryectiva: Decimos que la función f es no inyectiva y no suryectiva precisamente cuando no cumple ninguna de las dos propiedades.

Ejemplos:

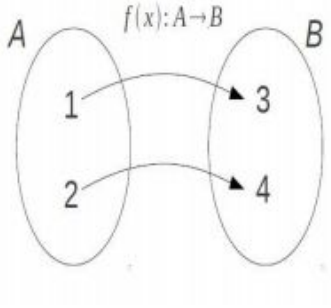
Función inyectiva no suryectiva.



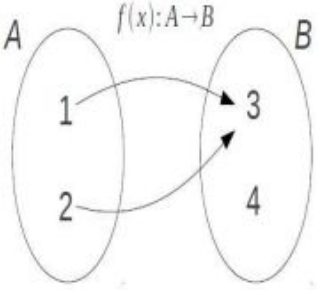
Función suryectiva no inyectiva.



Función biyectiva (inyectiva y suryectiva).

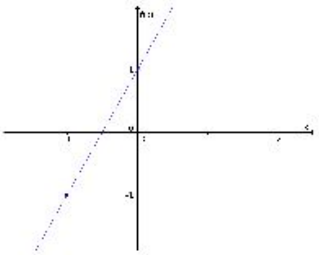


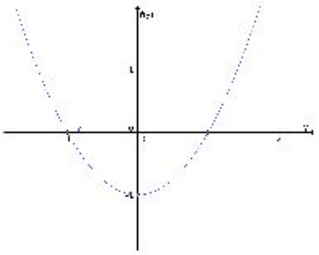
Función no inyectiva y no suryectiva.

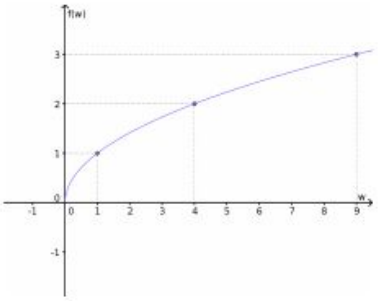


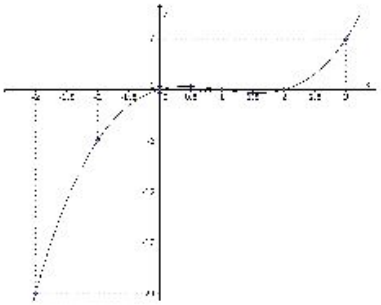
EJERCICIO 11

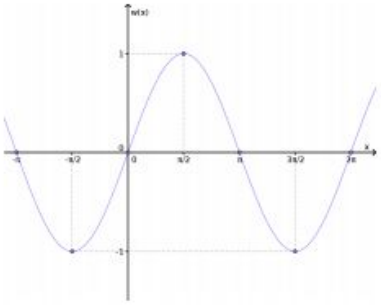
Determiná la inyectividad, suryectividad y/o biyectividad de las siguientes funciones considerando que el dominio de todas ellas es el conjunto de los números reales:











EJERCICIO 12 (ej. adicional)

Dada la función $f(x) = x^2$. Note que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ no es inyectiva. Encuentre 3 subconjuntos de $\mathbf{R}$, $D_i \quad i = 1, 2, 3$ tal que $f : D_i \to \mathbf{R}$ es inyectiva. ¿Existe un dominio D formado por números positivos y negativos tal que $f : D \to \mathbf{R}$ es inyectiva?

EJERCICIO 13 (ej. adicional)

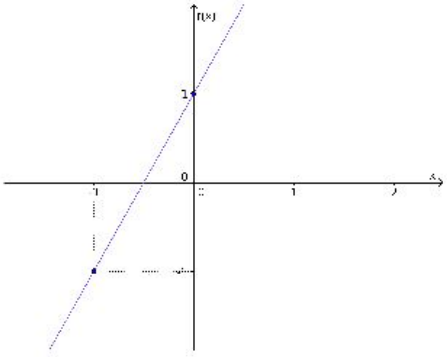
Pruebe que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva en su dominio natural.

Gráficas de algunas funciones

Recta o función lineal

$$\begin{cases} f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \\ f(x) = 2x + 1 \end{cases}$$

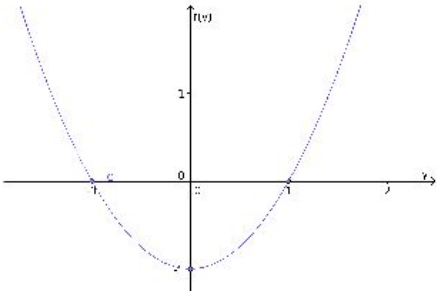
x	$f(x)$
0	1
-1	-1



Parábola o función cuadrática

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(y) = y^2 - 1 \end{cases}$$

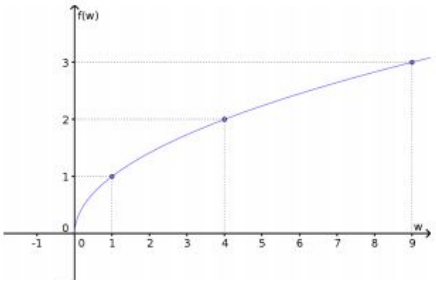
y	$f(y)$
-1	0
0	-1
1	0



Raíz cuadrada

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \cup 0 \to \mathbb{R} \\ f(w) = \sqrt{w} \end{cases}$$

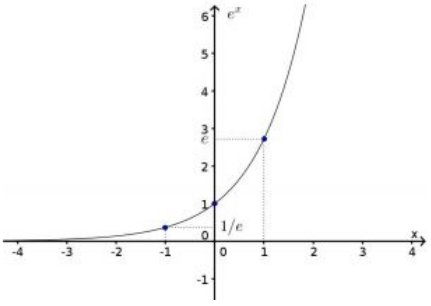
w	$f(w)$
1	1
4	2
9	3



Función exponencial

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

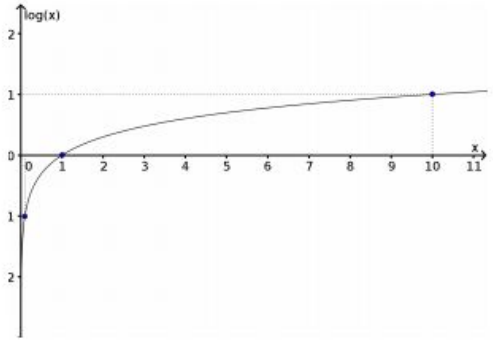
x	$g(x)$
-1	$\frac{1}{e}$
0	1
1	e



Función logarítmica

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log x \end{cases}$$

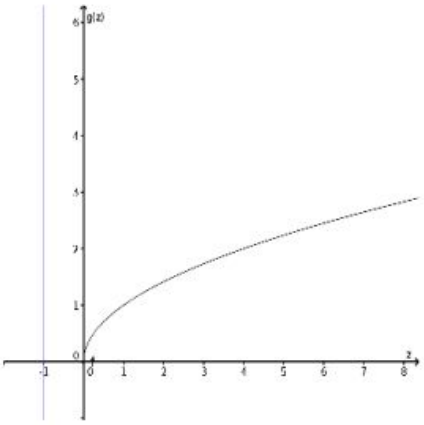
x	$f(x)$
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
10	1



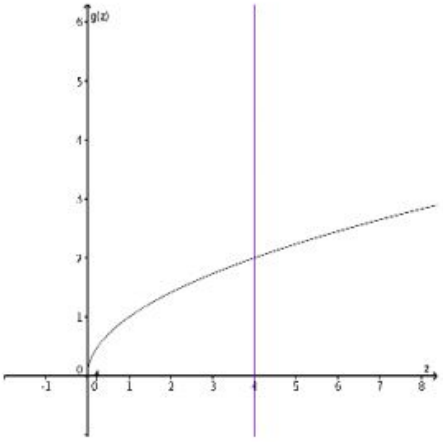
Criterio de la recta vertical:

Dada una gráfica de una aplicación, podemos decir si es o no función trazando una recta vertical.

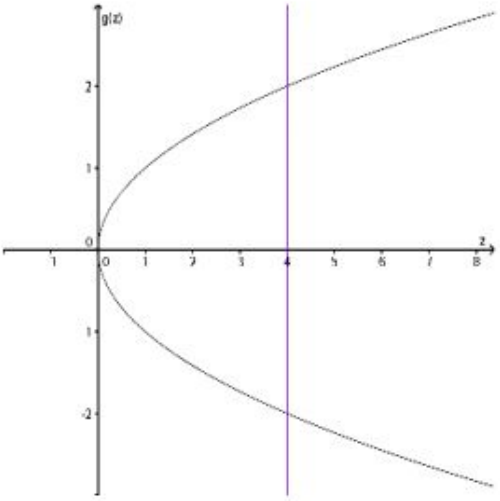
- Si la recta no corta a la gráfica significa que el elemento del eje de las abscisas por donde pasa la recta vertical no pertenece al dominio.



- Si todas las rectas verticales cortan una sola vez a la gráfica, resulta que la gráfica es una función.

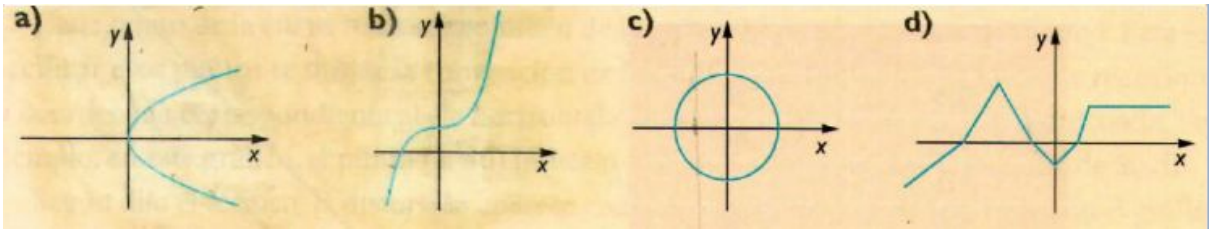


- Si existe una recta vertical que corta a la gráfica más de una vez, no es función.



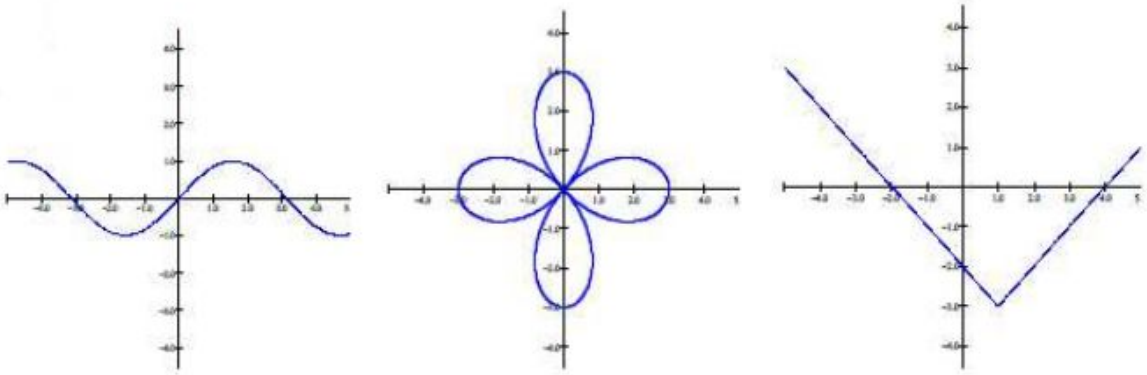
EJERCICIO 14

¿Cuáles de los siguientes gráficos no corresponden a funciones?



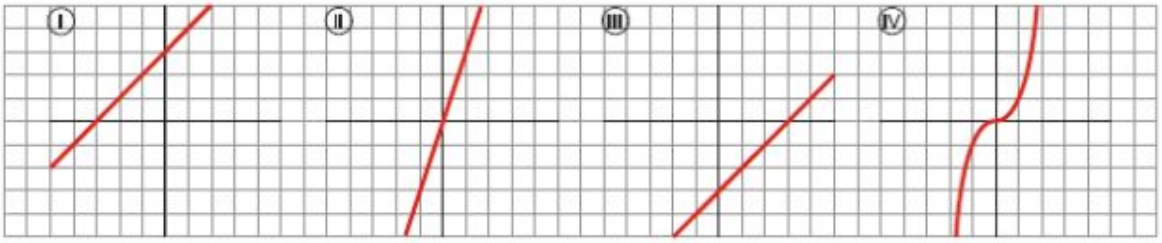
EJERCICIO 15

Determiná cuáles de las siguientes curvas corresponden a funciones justificando tu respuesta.



EJERCICIO 16 (ej. adicional)

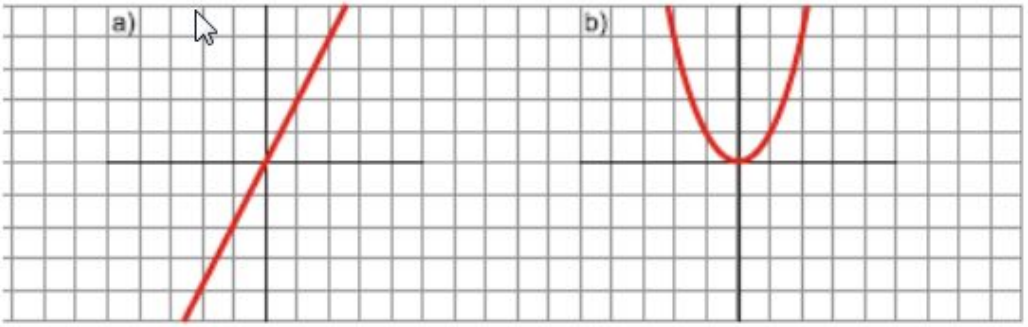
Asocien cada una de las siguientes gráficas de funciones con su expresión algebraica.



a) Y= 3x
b) Y=x^3
c) Y= x + 3
d) Y= x – 3

EJERCICIO 17 (ej. adicional)

¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas corresponden a cada una de las dos gráficas dadas?

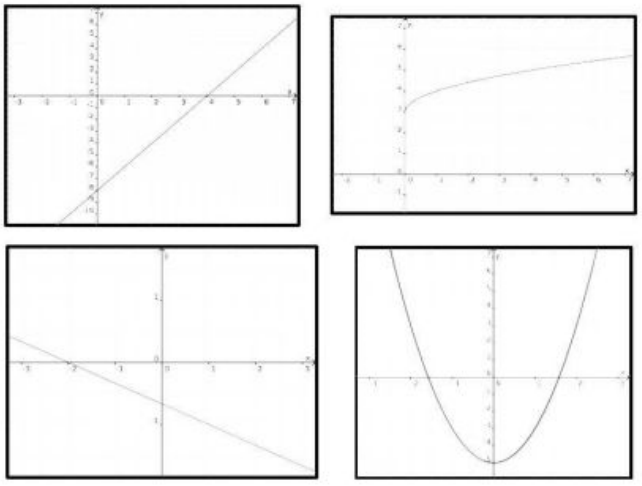


a) $Y=\frac{x}{2}$
b) $Y= 2x$
c) $Y=x^2 + 2$
d) $Y= x^2$

EJERCICIO 18 (ej. adicional)

A continuación se presentan las fórmulas y gráficos de varias funciones. Vinculá cada gráfico con su fórmula.

$y = 2x - 8$
$y = \sqrt{x} + 3$
$y = 2x^2 - 5$
$-3y - 2 = x$



De acuerdo a sus gráficas, las funciones pueden separarse en tres grupos:

Funciones pares: Las funciones pares son aquellas que satisfacen que

$$f(-x) = f(x)$$

por lo tanto, sus gráficas son simétricas respecto al eje de las ordenadas.

Funciones impares: Las funciones impares son aquellas que satisfacen que

$$f(-x) = -f(x)$$

por lo tanto, sus gráficas son simétricas respecto al origen de coordenadas.

Funciones no pares y no impares: Las funciones no pares y no impares son aquellas que no satisfacen ninguna de estas propiedades.

Ejemplos:

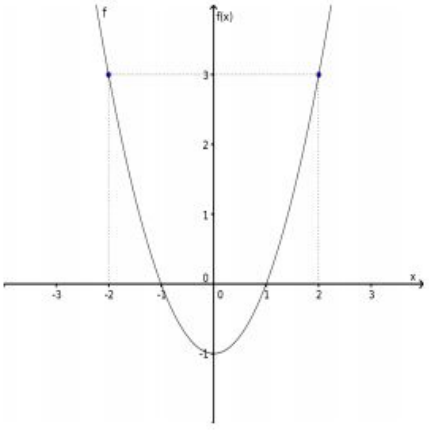
- **Función par**

  La función $f(x) = x^2 - 1$ es una función par. Para demostrarlo tomemos cualquier número real z, entonces, si evaluamos la función[1] f en z, tendremos que $f(z) = z^2 - 1$. Ahora evaluemos la función en $-z$:

  $$f(-z) = (-z)^2 - 1 = [(-1)^2\, z^2] - 1 = 1\, z^2 - 1 = z^2 - 1$$

  Luego, resulta que $f(z) = f(-z)$ para cualquier número real z. Por lo tanto, la función f es par.

  En la gráfica de la función se puede ver la simetría de la función con respecto al eje de las ordenadas. Se ve como si pusiéramos un espejo sobre el eje de las ordenadas.

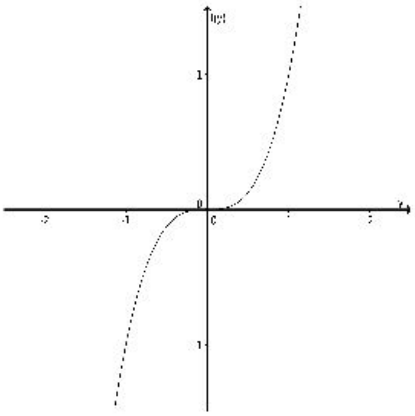


- **Función impar**

  Tomemos la función $f(y) = y^3$. Luego, si z es un número real cualquiera tenemos que $f(z) = z^3$, y si evaluamos la función en $-z$ tenemos que

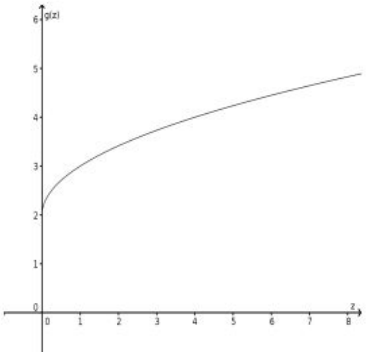
  $$f(-z) = (-z)^3 = (-1)^3\, z^3 = -z^3 = -f(z)$$

  Así encontramos que la función $f(y) = y^3$ es impar.



- **Función ni par ni impar:**

  Tomemos la función $g(z) = \sqrt{z} + 2$. Luego, como el dominio de esta función es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero, resulta que, si $z > 0$, $g(-z)$ no existe, por lo tanto $g(z) \neq g(-z)$ y $g(z) \neq -g(-z)$. Así encontramos que la función $g(z)$ no es par ni impar.



EJERCICIO 19

Definí la paridad de las siguientes funciones.

a) $\begin{cases} f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(a) = |a| \end{cases}$

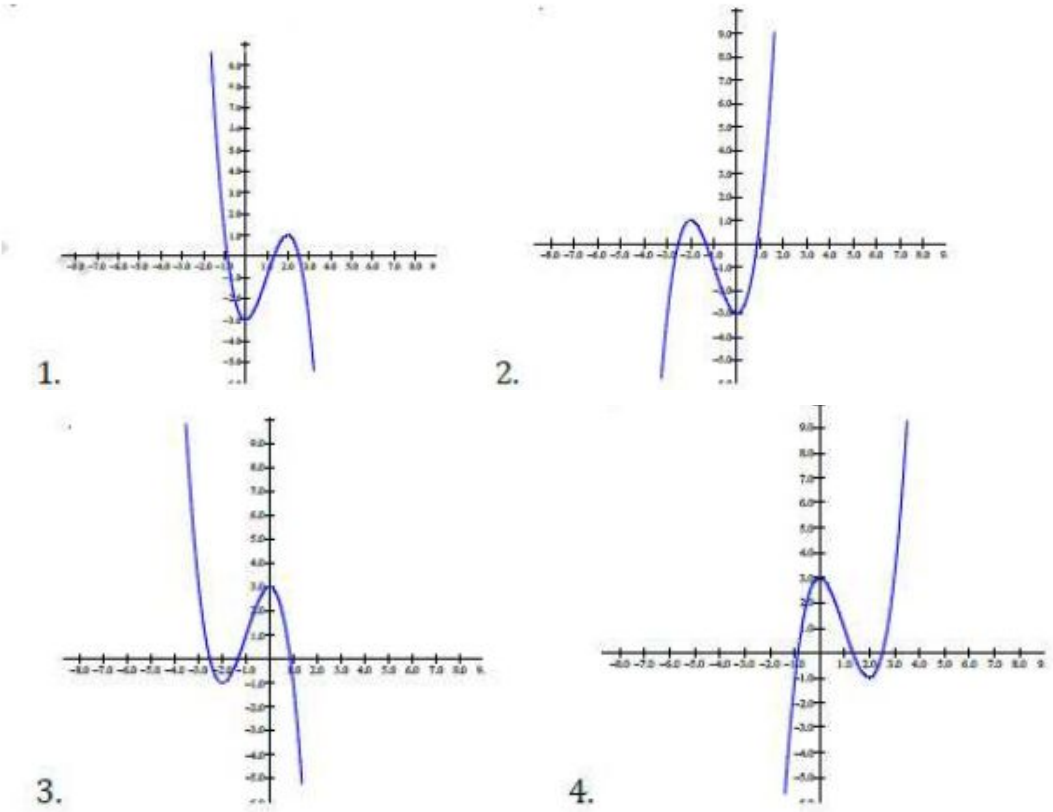
b) $\begin{cases} h(z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h(z) = -z^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} k(z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ k(z) = z^2 + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} p(f) : [2, +\infty) \to \mathbb{R} \\ p(f) = \sqrt{f - 2} \end{cases}$

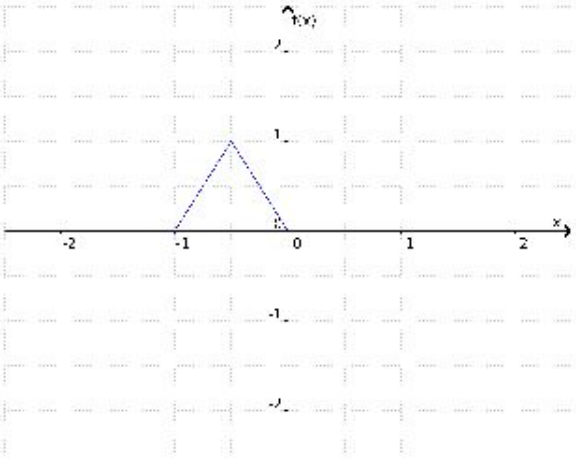
EJERCICIO 20

La gráfica 1 es la de $f(x)$, determiná cuáles de las siguientes corresponden a $-f(x)$, $f(-x)$ y $-f(-x)$. Justificá.



EJERCICIO 21 (ej. adicional)

La función $f(x)$ está definida en el intervalo $[-2, 2]$. En la figura se da la gráfica sobre la región $[-2; 0]$. Completá la gráfica sabiendo que: a) $f(x)$ es par; y b) $f(x)$ es impar.



Funciones polinómicas

Antes de definir qué es una función polinómica debemos dar la definición de polinomio. Un polinomio, $P(x)$, es una expresión matemática que se define de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_0, son números reales, $a_n \neq 0$ y los exponentes son naturales. Esto se simboliza:

$$\begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ \text{donde } a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A $\boldsymbol{x}$ la llamamos **"variable independiente" o "indeterminada"** porque puede tomar cualquier valor real, mientras que **los $\boldsymbol{a_i}$ se llaman "coeficientes"** y son valores reales constantes.

El grado de un polinomio está dado por el exponente más grande de la variable independiente y se simboliza como:

$$\mathrm{gr}(P) = n$$

y el coeficiente que multiplica a $\boldsymbol{x^n}$, en este caso $\boldsymbol{a_n}$, es el coeficiente principal. Mientras que **el coeficiente $\boldsymbol{a_0}$, que multiplica a $\boldsymbol{x^0}$, es el término independiente.**

Las funciones polinómicas son aquéllas que se vinculan matemáticamente con un polinomio:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \\ \text{donde } a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \ a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \end{cases}} \tag{1}$$

Las funciones no polinómicas serán aquellas que no están vinculadas a un polinomio, como por ejemplo la raíz, la función logarítmica, la función exponencial[2], las funciones trigonométricas, entre otras.

EJERCICIO 22

¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios? Justificá su respuesta.

a) $P(x) = 3x + 4x^2 - \sqrt{2}x^8$

b) $Q(z) = \frac{3}{5}z^{12} - z^{-6}$

c) $R(a) = 4$

d) $H(w) = -2{,}5w + 4 \times 10^{23}w^{67} - \sqrt{w^3}$

Función lineal

Una función lineal es aquella que está vinculada matemáticamente con un polinomio de grado 1, y se define como:

$$\boxed{\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a\,x + b \end{cases}} \tag{3}$$

Donde a y b son números reales constantes (a es el coeficiente principal y b el término independiente). **El gráfico de este tipo de funciones es siempre una recta.**

La notación tradicional para la función lineal es tomar la x como variable independiente e $y = f(x)$ como variable dependiente. Siguiendo esta notación diremos que:

$$\boxed{y = a\,x + b} \tag{4}$$

Es la forma explícita de la ecuación de la recta. Todos los pares de valores (x, y) que satisfagan esta relación representan gráficamente los puntos de la recta, o sea, son los pares ordenados que pertenecen a la gráfica de la recta.

Ahora vamos a ver algunas definiciones asociadas a la expresión funcional de la recta $f(x) = ax + b = y$.

Ordenada al origen: es el punto de intersección entre la recta y el eje de las ordenadas.

Por lo tanto este punto es aquel que pertenece a la recta cuya primera coordenada es igual a 0, por lo tanto la coordenada y será:

$$\begin{aligned} y &= f(0) \\ y &= a\,0 + b \\ y &= b \end{aligned}$$

Luego, **la ordenada al origen es el punto $(0, b)$.**

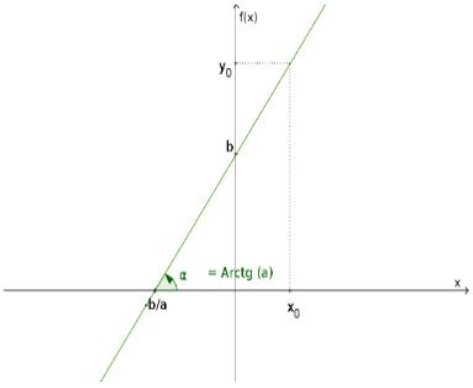
Raíz o cero: es el punto de intersección entre la recta y el eje de las abscisas.

Es decir que la coordenada y de este punto debe ser igual a cero. Para hallar la coordenada x de este punto hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ a\,x + b &= 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Luego, **la raíz es el punto $(-b/a, 0)$.**

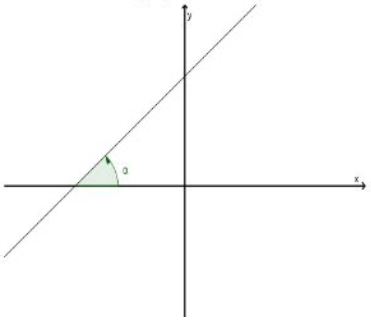
Pendiente: La pendiente es una magnitud que da idea de la inclinación de la recta con respecto al eje positivo de la abscisas. **Llamaremos inclinación al ángulo α que forma la recta con el eje positivo de las abscisas.** Este ángulo se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, desde el eje positivo de las abscisas hasta la recta, por lo tanto $0 \leq \alpha < \pi$. **La pendiente será la tangente de la inclinación, $\tan(\alpha)$.**



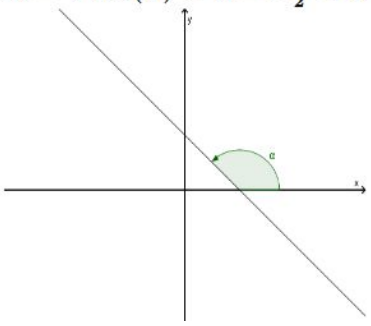
la pendiente de la recta $y = a\,x + b$ es igual a $a = \tan(\alpha)$.

El signo de la pendiente nos da mucha información sobre la recta:

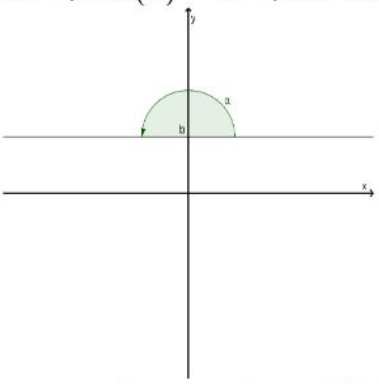
$a > 0 \Longrightarrow \tan(\alpha) > 0 \Longrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



$a < 0 \Longrightarrow \tan(\alpha) < 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

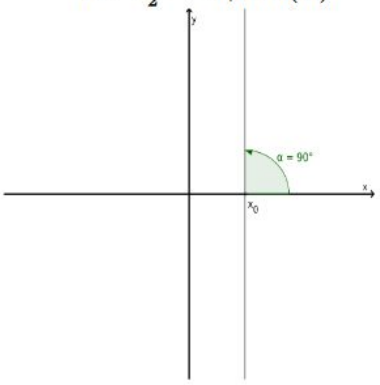


$a = 0 \Longrightarrow \tan(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$.



En este caso la expresión funcional de la recta es $y = b$ (función constante). Notemos que, si bien **la gráfica de la función constante corresponde a una recta**, no es una función lineal debido a que el grado del polinomio no es igual a 1.

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \nexists \tan(\alpha)$



La recta es paralela al eje de las ordenadas y su expresión es $x = x_0$, donde x_0 es un número real constante. Notemos que en este caso la relación $x = x_0$ no es función.

EJERCICIO 23

Identificá entre las siguientes funciones cuáles son lineales:

a) $f(h) = h^2 - (h - 3)^2$

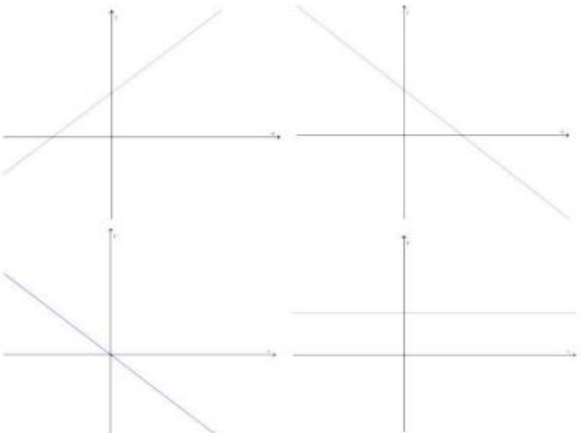
b) $g(q) = \frac{1}{2}(q + 4) - 3q$

d) $h(r) = \frac{r^2 - 4}{r + 2}$

EJERCICIO 24

Uní con flechas los gráficos y las distintas condiciones que deben cumplir las funciones que pueden representarlos y justificá tu respuesta.

$y = m\,x + b$ con $b > 0$ y $m < 0$
$y = m\,x + b$ con $b = 0$ y $m < 0$
$y = m\,x + b$ con $b > 0$ y $m = 0$
$y = m\,x + b$ con $b > 0$ y $m > 0$



EJERCICIO 25 (ej. adicional)

Para estimar la presión atmosférica en cierto lugar próximo al nivel del mar, puede aplicarse la siguiente fórmula: $P(h) = -\dfrac{1}{10500}\,h + 760$, donde P representa el valor de la presión en milímetros de mercurio (mm Hg) y h la altura sobre el nivel del mar expresada en mm.

a) ¿Cuál es la presión atmosférica aproximada que soporta un avion que vuela a 3500m de altura?

b) ¿A qué altura sobre el nivel del mar se encuentra la ciudad de Córdoba si la presión atmosférica promedio en esa localidad es de 72,2 cm Hg?

c) ¿Entre que valores de altura sería razonable utilizar esta fórmula?

EJERCICIO 26 (ej. adicional)

Un automóvil se dirige por un camino recto a 90 km/h desde la ciudad A hasta la ciudad B, distantes entre sí 120 km.

a) Encuentra una expresión que represente la situación.

b) ¿A cuantos km de B se encontrará luego de transcurridos 45 minutos de viaje?

c) ¿En qué momento se encontrará a 15 km de B?

d) ¿Cuál es el dominio para esta función?

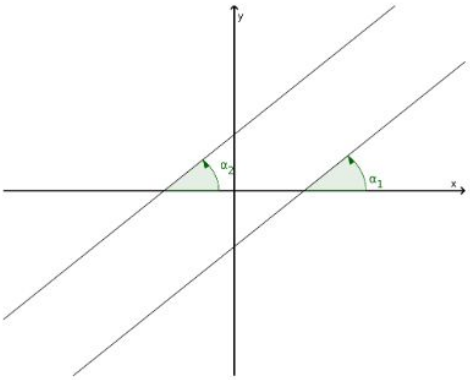
Rectas paralelas y perpendiculares

Ahora vamos a ver qué relación existe entre las expresiones de dos rectas que son paralelas, y entre las expresiones de dos rectas perpendiculares.

Vamos a considerar dos rectas $y_1 = a_1\,x + b_1$ e $y_2 = a_2\,x + b_2$.

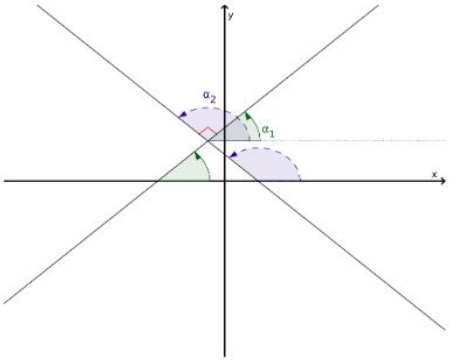
Rectas paralelas: Para que dos rectas sean paralelas, sus inclinaciones deben ser iguales, esto es $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ahora, si $\alpha_1 = \alpha_2$, resulta que sus tangentes también deben ser iguales, $\tan(\alpha_1) = \tan(\alpha_2)$, por lo tanto obtenemos que **las pendientes de las dos rectas son iguales, $a_1 = a_2$.**



$$\boxed{y_1 \parallel y_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2}$$

Rectas perpendiculares: **Para que dos rectas sean perpendiculares sus inclinaciones deben ser tales que $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$.**



$$\boxed{y_1 \perp y_2 \Longleftrightarrow a_1\, a_2 = -1}$$

EJERCICIO 27

Dadas las siguiente funciones lineales determiná cuáles son paralelas y cuáles son perpendiculares.

a) $f(x) = 3x + 1$; $g(x) = 3(x - 1)$

b) $y + 1 - 2x = x + \frac{1}{2}$; $1 = y - \frac{1}{3}x$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $y - 1 = -2(-1 - x)$

Distintas expresiones de la función lineal

Una recta queda definida por su pendiente y su ordenada al origen. Por lo tanto, para hallar su expresión funcional es necesario determinar estos dos valores.

Existen distintas formas de expresar funcionalmente a una recta que surgen de tratar de determinar la recta a partir de distintos datos.

- **Conociendo la pendiente (o la inclinación), a (ó α), y un punto, (x_0, y_0), perteneciente a la recta.**

$$\boxed{a = \tan(\alpha) = \frac{y - y_0}{x - x_0}} \tag{5}$$

Si queremos encontrar la forma explícita de la recta hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a\,(x - x_0) &= y - y_0 \\ a\,x \underbrace{- a\,x_0 + y_0}_{=b} &= y \\ a\,x + b &= y \end{aligned}$$

- **Conociendo dos puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que pertenecen a ella.**
  Nuevamente tomamos un punto cualquiera sobre la recta.

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}} \tag{6}$$

Si queremos hallar la forma explícita hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) &= y - y_1 \\ \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{=a} x \underbrace{- \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1}_{=b} &= y \\ a\,x + b &= y \end{aligned}$$

EJERCICIO 28

Encontrá la función lineal sabiendo que:

a) La recta pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

b) La recta tiene una inclinación de $45°$ y pasa por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

c) La recta pasa por el punto $(-2, -2)$ y es perpendicular a la recta $y = -x$

EJERCICIO 29 (ej. adicional)

Encuentra la expresión de la función lineal que cumple en cada caso con las condiciones indicadas:

a) Tiene pendiente -3 y raíz 4

b) Pasa por los puntos $(-1; 2)$ y $(\frac{1}{2}; 5)$

c) Tiene ordenada al origen $(0; -8)$ y pasa por $(1; 4)$

d) Es una recta paralela a la que representa la función $f(x) = -3\,x + 5$ y que pasa por $(-1; 8)$.

e) Pasa por el punto $(1; 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1; 1)$ y $(6; 5)$.

Función cuadrática

Una función cuadrática es un polinomio de grado 2, y se define como:

$$\boxed{\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \end{cases}} \tag{7}$$

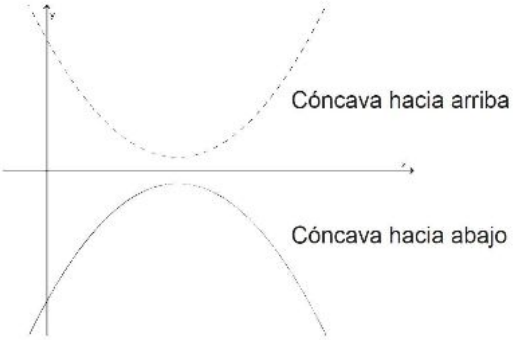
donde a, b y c son números reales constantes (a es el coeficiente principal y c el término independiente). **El gráfico de este tipo de funciones es siempre una parábola**[3].

Concavidad: es una característica de las líneas o superficies curvas.

Consideremos una cuchara. La parte cóncava es aquella donde se ubica la sopa (o cualquier otro líquido). La otra es la parte convexa.

El coeficiente principal de la función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$, es el que nos da la información sobre la concavidad de la parábola.

- **Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.**
- **Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo.**[4]



Eje de simetría: es una recta que divide simetricamente a la curva, es decir, intuitivamente la separa en dos partes congruentes. Puede ser entendido como un espejo que refleja la mitad de la parábola en cuestion.

Los puntos importantes de esta función son:

Ordenada al origen: es la intersección de la parábola con el eje de las ordenadas. La primera coordenada de este punto es igual a 0, por lo tanto:

$$f(0) = a\,0^2 + b\,0 + c = c$$

Entonces, **la ordenada al origen es el punto $(0, c)$.**

Raíz: es la intersección entre la parábola y el eje de las abscisas. En este caso, la segunda coordenada de este punto es nula.

$$y = 0 \Longrightarrow a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}} \tag{8}$$

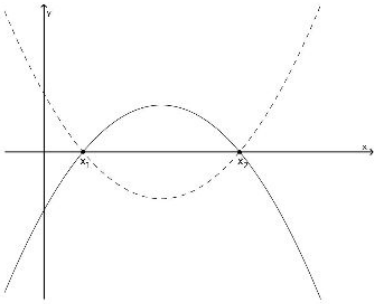
Como la raíz cuadrada sólo está definida para números positivos, y aparece un doble signo, $\pm$, tendremos tres casos:

- **Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$**, existen dos números reales distintos, x_1 y x_2, que satisfacen que $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

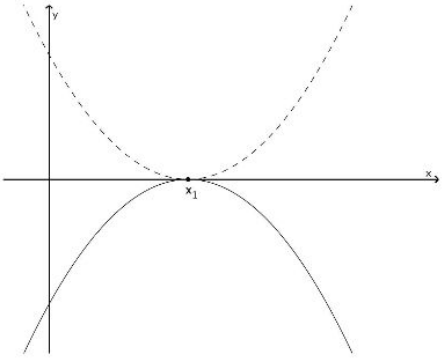
Esto significa que **la parábola corta al eje de las abscisas en dos puntos: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.**



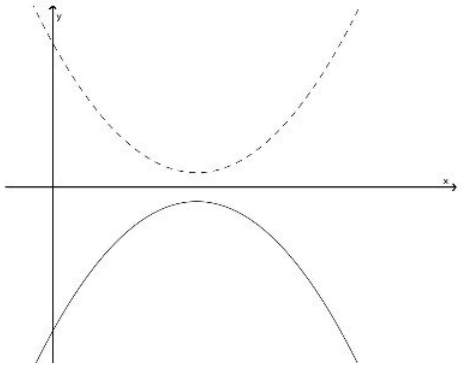
- **Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$**, existen dos números reales iguales, $x_1 = x_2$, que satisfacen que $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2\,a}$$

Esto significa que **la parábola corta al eje de las abscisas en un solo punto: $(-\frac{b}{2\,a}, 0)$.**



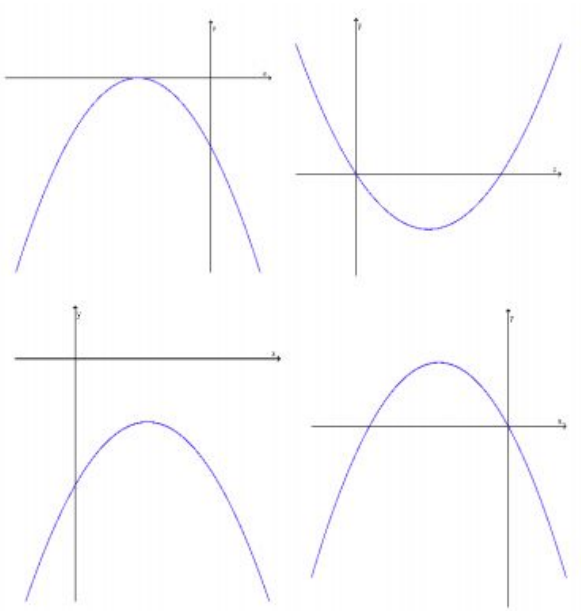
- **Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$**, no existe ningún número real que satisfaga que $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Esto significa que **la parábola no corta al eje de las abscisas.**



De este modo vemos que conociendo el signo del argumento de la raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$, podemos saber cuántas raíces tiene la parábola. Por esta razón **se denomina "discriminante" a esta expresión** y se lo denota con la letra griega delta, $\Delta = b^2 - 4ac$.

EJERCICIO 30

Identificá en cada caso si el discriminante, Δ, es mayor, menor o igual a cero.



Vértice: Es el punto máximo (si la parábola es cóncava hacia abajo) o el punto mínimo (si la parábola es cóncava hacia arriba). La parábola es simétrica respecto a una recta que pasa por el vértice.

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2\,a}} \qquad \boxed{y_v = c - \frac{b}{4\,a}}$$

Propiedades de funciones

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función f + g está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de f + g es $D_f \cap D_g$

Ejemplo

Sea f(x) = x y g(x) = $\sqrt{x}$. Entonces (f + g) (x) = x + $\sqrt{x}$. El dominio de f es $(-\infty,\infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$. Así el dominio de f + g es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^3 - 1$ y g(x) = 4x. Si x = 3, entonces $f(3) = (3)^3 - 1 = 26$ y g(3) = 4(3) = 12. Así, (f + g) (3) = f(3) + g(3) = 26 – 12 = 14.

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función f - g está definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

El dominio de f - g es $D_f \cap D_g$

Ejemplo

Sea f(x) = $\sqrt{x+1}$ y g(x) = $\sqrt{x-4}$, entonces f(- g)(x) = f(x) – g(x) = $\sqrt{x+1}$ - $\sqrt{x-4}$. El dominio de f es $[-1, \infty)$, y el dominio de g es $[4, \infty)$. El dominio de f – g es $D_f \cap D_g = [-1, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$.

Sean f y g dos funciones y D_f y D_g denotan los dominios de f y g, respectivamente. La función f · g está definida por

(f · g)(x) = f(x) · g(x). El dominio de f · g es $D_f \cap D_g$

Ejemplo

Sea f(x) = x – 2 y g(x) = x + 2. Entonces (f·g)(x) = f(x) g(x) = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, \infty)$. Por tanto el dominio de f · g es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$.

Ejemplo

Sea f(x) = | x | y g(x) = 5. Entonces (f ·g)(x) = f(x) g(x) = | x |·5. El dominio de f es 3 y el dominio de g es 3. Entonces el dominio de f · g es $D_f \cap D_g = 3$. Si x = -2, entonces (f · g)(-2) = f(-2) · g(-2) = |-2|5 = 2·5 = 10.

Sean f y g dos funciones y D_f, D_g sus dominios respectivamente. Entonces la función f/g está definida por:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)\ ,\ g(x) \neq 0$$

El dominio de f /g es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores de x para los cuales g(x) = 0.

Ejemplo

Si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$. Entonces $(f/g)(x) = f(x) / g(x) = x + 4/(x^2 - 1)$. El dominio de f y el de g son los números reales. La función $g(x) = x^2 - 1$ es cero para x = 1 y x = -1. Por lo tanto el dominio de f/g es R – {-1, 1}

Composición de funciones

Sabemos que la notación "g(a)" significa el valor de la función g(x) cuando x = a; se obtiene al sustituir a por x, siempre que x aparezca en la expresión de g(x). Por ejemplo,

$$\text{si } g(x) = x^3 + 2, \text{ entonces } g(a) = a^3 + 1;$$

$$\text{si } g(x) = \sqrt{x - x^2}\ , \text{ entonces } g(a) = \sqrt{a - a^2}$$

Si f(x) es una función, entonces g(f(x)) es la función que se obtiene al sustituir f(x) en lugar de x, siempre que ésta ocurra en la expresión de g(x). La función g(f(x)) es llamada la compuesta de g con f y se utiliza el símbolo operacional o para denotar la compuesta de g con f. Así (g o f) (x) = g(f(x)).

Si $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 2$, entonces $(g \text{ o } f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 2)^2$. ¿Cuál es el dominio de g o f? La siguiente definición nos da la respuesta,

Si f es una función de X en Y y g es una función de Y a Z, entonces la función compuesta g o f es la función de X a Z dada por

$$(g \text{ o } f)(x) = g(f(x))$$

para cada x en X. El dominio de g o f es

$$D_{gof} = \{x \mid x \,\varepsilon\, D_f \text{ y } f(x) \,\varepsilon\, D_g\}$$

EJERCICIO 31

Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$. Encuentre

(a) $\mathrm{Dom}(f)$, $\mathrm{Dom}(g)$

(b) $f + g$

(c) $f \cdot g$

(d) $f \circ g$

(e) $g \circ f$

y los respectivos dominios.

EJERCICIO 32 (ej. adicional)

Sea f(x) = $\sqrt{4-x^2}$ y g(x) = 3x + 1. Encuentre a) la suma, b) la diferencia, c) el producto y d) la división de f y g.

EJERCICIO 33(ej. adicional)

Sea f(x) = x + 3 y g(x) = 2x + $\sqrt{x}$. Encuentre gof y especifique su dominio.

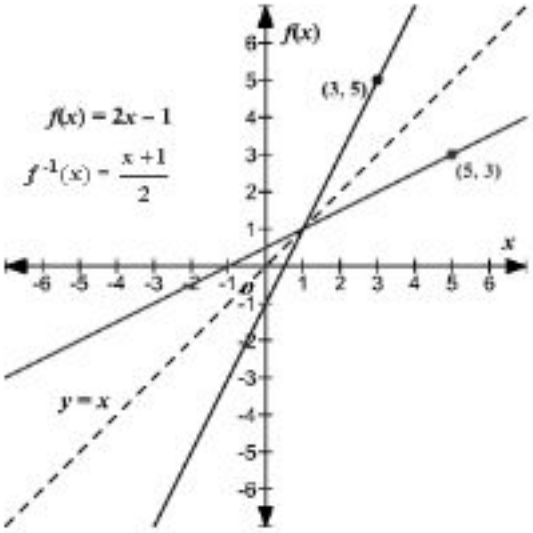
Sean f(x) = $\sqrt{x}$ y g(x) = 2x – 3. Encuentre (fog) (x), (gof)(x) y sus dominios.

Inversa de una función

Las funciones f y g son **funciones inversas** si $f(g(x)) = x$ para todas las x en el dominio de g y $g(f(x)) = x$ para todas las x en el dominio de f.

La inversa de una función f es usualmente denotada por f^{-1} y se lee "f inversa." (Dese cuenta que el superíndice –1 en f^{-1} **no** es un exponente).

Suponga que dos funciones son inversas. Si (a, b) es un punto en la **gráfica** de la función original, entonces el punto (b, a) debe ser un punto en la gráfica de la función inversa. Las gráficas son *imágenes espejo* una de otra con respecto a la recta $y = x$.



Para encontrar la inversa de una función algebraicamente, intercambie la x y la y y resuelva para y.

Ejemplo:

Digamos que $h(x) = x^3 + 4$

Reemplace $h(x)$ con y e intercambie x y y:

$y = x^3 + 4$

$x = y^3 + 4$

Resuelva para y: $x - 4 = y^3$

$\sqrt[3]{x-4} = y = h^{-1}(x)$

EJERCICIO 32

Determine si las siguientes funciones son inversas una de la otra:

(a) $f(x) = 2x + 3 \qquad g(x) = \frac{x+3}{2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x-4} \qquad g(x) = x^2 + 4 \quad x \geq 0$

(c) $f(x) = 1 - x^3 \qquad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

(d) $f(x) = x^{-2} \quad , x > 0 \qquad g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \quad , x > 0$

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \qquad \text{en} \quad]\frac{1}{2}, 1[$