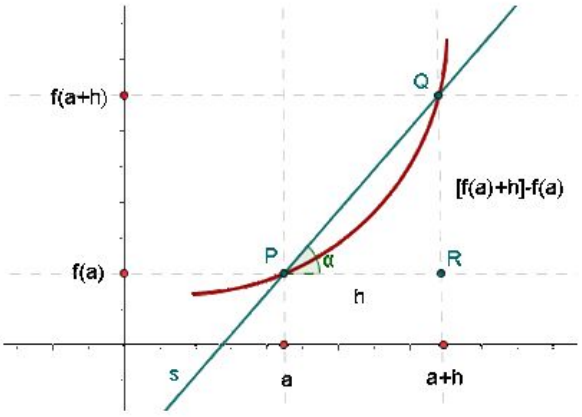
TASA DE VARIACIÓN

Consideremos una función **y = f(x)** y consideremos dos puntos próximos sobre el eje de abscisas **"a"** y **"a+h"**, siendo **"h"** un número real que corresponde al incremento de x **(Δx)**.

Se llama **tasa de variación (T.V.)** de la función **en el intervalo [a, a+h]**, que se representa por **Δy**, a la **diferencia entre las ordenadas** correspondientes a los puntos de abscisas **a** y **a+h**.

Δy = [f(a+h) − f(a)]



TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** en intervalo **[a, a+h]**, y se representa por $\frac{\Delta y}{h}$ ó $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, al **cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo** considerado sobre el eje de abscisas, h ó Δx, esto es:

$$TVM[a,a+h]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

EJEMPLOS

1. Calcular la T.V.M. de la función f(x) = x^2 − x en el intervalo [1,4].

$$TVM[1,4]=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{12-0}{3}=4$$

2. El índice de la bolsa de Madrid pasó cierto año de 1350 a 1510. Hallar la tasa de variación media mensual.

$$TVM=\frac{1510-1350}{12}=\frac{160}{12}=13.33$$

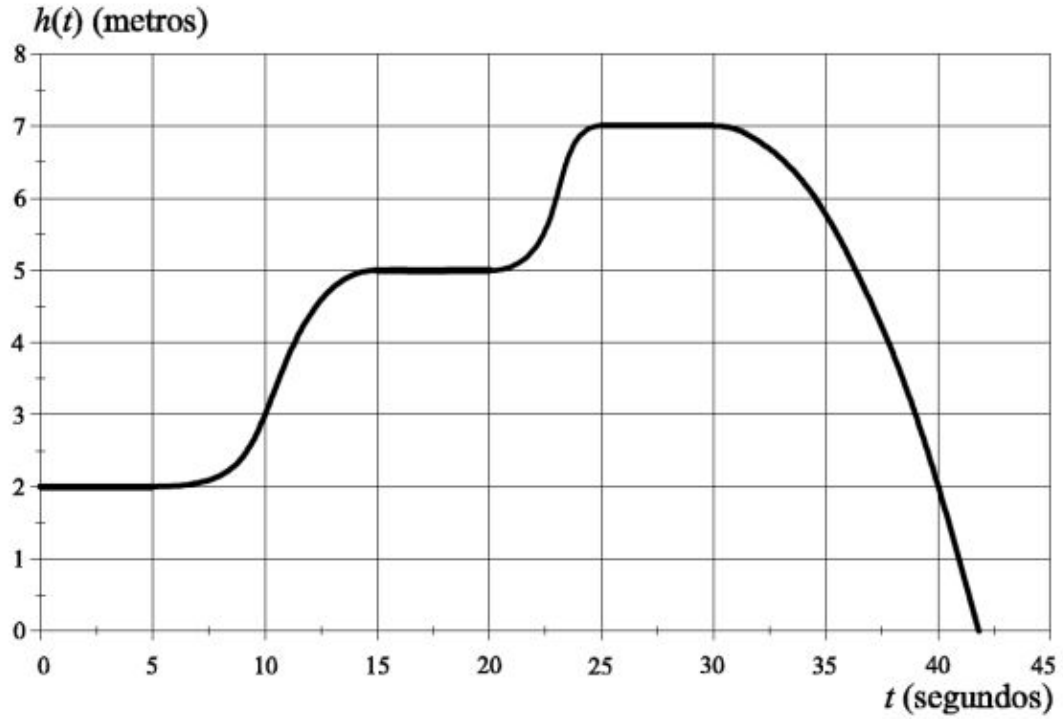
EJERCICIO 1

- Halla la tasa de variación de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

- **$y=x+2$** en los intervalos: [0,1] y [-3,-1].
- **$y=x^2-2x-3$** en los intervalos: [1,3] y [-1,0].
- **$y=x^3-2x^2-x+1$** en los intervalos: [0,2], [-2,3] y [-1,1].

EJERCICIO 2

Completen la siguiente tabla a partir de la información brindada por la gráfica.



a	b	$h(b)$	$h(a)$	Variación total de h entre a y b	Variación media de h entre a y b
0	10	3	2	$3-2=1$	$1m/10s = 1/10m/s$
5	10				
5	25				
20	25				
20	40				
0	40				
30	40				
25	35				

Usando la tabla anterior, consideren a=5 y b=25. Hagan lo siguiente:

a) Identifiquen los puntos de la gráfica correspondientes a a=5 y b=25.
b) Dibujen la recta que pasa por los puntos identificados en el inciso anterior.
c) Usando la gráfica, calculen la pendiente de la recta dibujada y comparen el valor obtenido con la variación media correspondiente al intervalo [5; 25].

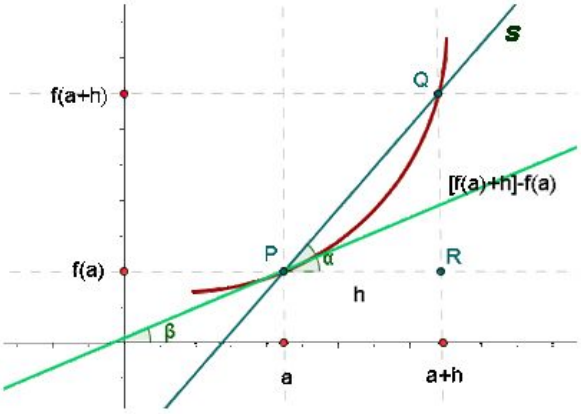
LUEGO,

d) Repitan los incisos anteriores para dos intervalos más de los dados en la tabla.
e) ¿Pueden encontrar una relación entre la variación media en un intervalo y la pendiente de la recta que pasa por los puntos correspondientes en la gráfica?

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La derivada de la función f(x) en el punto x = a es el valor del límite, si existe, de un cociente incremental cuando el incremento de la variable tiende a cero.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



EJEMPLO

Hallar la derivada de la función $f(x) = 3x^2$ en el punto $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 3 \cdot 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) - 12}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 12h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} (3h + 12) = 12$$

EJERCICIO 2

Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

FUNCIÓN DERIVADA

La función derivada de una función f(x) es una función que asocia a cada número real su derivada, si existe. Se denota por **f'(x)**.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJEMPLO

- **1.** Calcular la función derivada de $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 1 - \left(x^2 - x + 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x - h + 1 - x^2 + x - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(2x + h - 1\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(2x + h - 1\right) = 2x - 1$$

- **2.** Hallar $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(1)$.

$f'(-1) = 2(-1) - 1 = -3$

$f'(0) = 2(0) - 1 = -1$

$f'(1) = 2(1) - 1 = 1$

EJERCICIO 3

Deriven

1) $f(x) = x^2 - 10x + 100$

2) $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

3) $f(x) = (2x)^3$

4) $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$

5) $f(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

6) $g(x) = x^{100} - 50x + 1$

7) $s(t) = t^3 + 6t^7 + 2t$

8) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

9) $G(s) = \left(s^2 + s + 1\right)\left(s^2 + 2\right)$

10) $f(x) = \frac{x^5}{x^3 - 2}$

DERIVADAS LATERALES

Derivada por la izquierda

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada por la derecha

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Una función es derivable en un punto si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden.

EJEMPLO

En las funciones definidas a trozos es necesario estudiar las **derivadas laterales** en los **puntos** de separación de los distintos trozos.

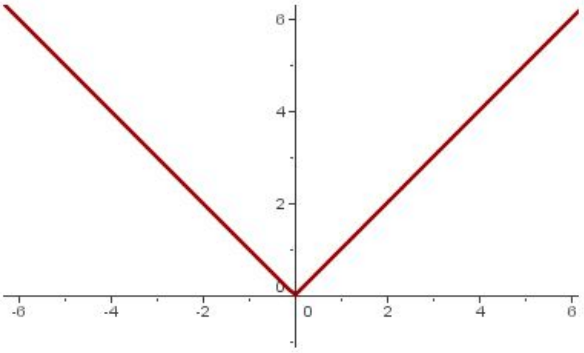
- Estudiar la derivabilidad de la función f(x) = |x|.

$$f(x)=\begin{cases} -x & Si \quad x<0 \\ x & Si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

Puesto que las derivadas laterales en x = 0 son distintas, la función no es derivable en dicho punto.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{0+h-0}{h}=\frac{h}{h}=1$$



Las derivada laterales no coinciden en los picos ni en los puntos angulosos de las funciones. Por tanto en esos puntos no existe la derivada.

EJERCICIO 4

- Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x & Si \quad x<0 \\ x^2 & Si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si una función es derivable en un punto x = a, entonces es continua para x = a.

El reciproco es falso, es decir, hay funciones que son continuas en un punto y que, sin embargo, no son derivables.

EJEMPLO

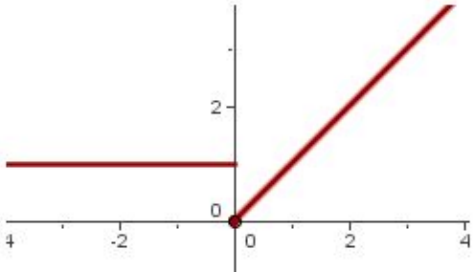
Estudiar la continuidad y derivabilidad de las funciones:

1. $f(x)=\begin{cases} 1 & Si \quad x<0 \\ x & Si \quad x\geq 0 \end{cases}$

En primer lugar estudiamos la continuidad en x = 0.

$$f(0)=0 \qquad \lim_{x\to 0^-} 1=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} x=0$$

La función no es continua, por tanto tampoco es derivable.



EJERCICIO 5

$$f(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x<0 \\ x & if \quad x\geq 0 \end{cases}$$

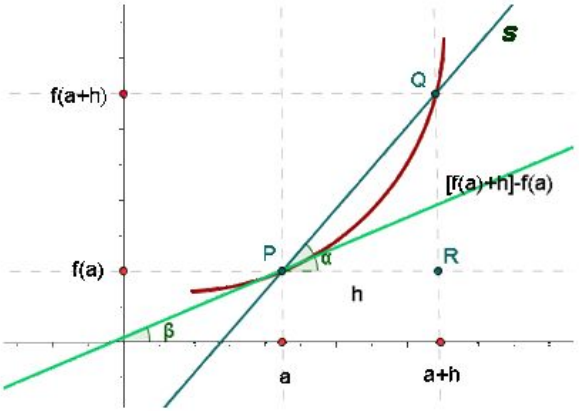
EJERCICIO 6

$f(x) = x^2$ en $x = 0$.

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

$$tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$



Recta tangente a una curva en un punto

La recta tangente a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto (a, f(a)) y cuya pendiente es igual a f '(a).

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EJEMPLO

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.

$y = -3x + 2$

La pendiente de la recta es el coefeciente de la x. $m = -3$

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

$f'(a) = 2a - 5$

$2a - 5 = -3$ $\qquad a = 1$

$P(1, 2)$

$y - 2 = -3(x - 1)$ $\qquad$ **$y = -3x + 5$**

Obsevamos que como la recta es paralela a la dada tiene la misma

EJERCICIO 7

Encuentren la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado:

1) $y = \dfrac{x}{x-3}$; $(6, 2)$

2) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; $(3, 0.3)$

3) $y = x + \dfrac{4}{x}$; $(2, 4)$

4) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(-1, 1/2)$

REGLAS DE DERIVADA

Derivada de una constante

$f(x) = k$ $\qquad$ $f'(x) = 0$

Derivada de x

$f(x) = x$ $\qquad$ $f'(x) = 1$

SUMA	$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$	
PRODUCTO POR UN NÚMERO	$D[k.f(x)] = k.f'(x)$	
PRODUCTO	$D[f(x).g(x)] = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$	
COCIENTE	$D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$	
COMPOSICIÓN (Regla de la cadena)	$D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)].g'(x)$ $D\{f(g[h(x)])\} = f'(g[h(x)]).g'[h(x)].h'(x)$	
POTENCIA	$D(x^k) = k.x^{k-1}$ $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $D\left(\dfrac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -\dfrac{1}{x^2}$	$D\{[f(x)]^k\} = k.[f(x)]^{k-1}.f'(x)$ $D\left[\sqrt{f(x)}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}.f'(x)$ $D\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\dfrac{1}{[f(x)]^2}.f'(x)$

TRIGONOMÉTRICA	$D(\sin x)=\cos x$ $D(\cos x)=-\sin x$ $D(\tan x)=1+\tan^2 x$	$D[\sin f(x)]=f'(x).\cos f(x)$ $D[\cos f(x)]=-f'(x).\sin f(x)$ $D[\tan f(x)]=[1+\tan^2 f(x)].f'(x)$
FUNCIONES ARCO (Inversa o recíproca de las trigonométricas)	$D(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D(\arccos x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D[\arctan x]=\frac{1}{1+x^2}$	$D[\arcsin f(x)]=\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.f'(x)$ $D[\arccos f(x)]=\frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}.f'(x)$ $D[\arctan f(x)]=\frac{1}{1+[f(x)]^2}.f'(x)$
EXPONENCIALES	$D(e^x)=e^x$ $D(a^x)=a^x.\ln a$	$D[e^{f(x)}]=e^{f(x)}.f'(x)$ $D[a^{f(x)}]=a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$
LOGARÍTMICAS	$D(\ln x)=\frac{1}{x}$ $D(\log_a x)=\frac{1}{x}.\frac{1}{\ln a}$	$D[\ln f(x)]=\frac{1}{f(x)}.f'(x)$ $D[\log_a f(x)]=\frac{1}{f(x)}.\frac{1}{\ln a}.f'(x)$

EJERCICIOS:

1.

Se conocen los siguientes valores:

$f(5)$	$f'(5)$	$g(5)$	$g'(5)$
1	6	-3	2

Determinen cuánto valen:

a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

2.

dada la siguiente información:

$$f(3)=1 \qquad g(3)=2 \qquad h(3)=-1$$
$$f'(3)=4 \qquad g'(3)=6 \qquad h'(3)=1$$

Hallar:

$a)(f+g)'(3) \qquad b)(f-g+h)'(3) \qquad c)(fg)'(3)$

$d)(fg-h)'(3) \qquad e)(\frac{f}{g})'(3) \qquad f)(\frac{fg}{h})'(3)$

EJERCICIOS

1 Calcula las derivadas de las funciones:

1 $f(x)=5$

2 $f(x)=-2x$

3 $f(x)=-2x+2$

4 $f(x) = -2x^2 - 5$

5 $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$

6 $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{3}$

7 $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$

8 $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

9 $f(x) = \left(5x^2 - 3\right) \cdot \left(x^2 + x + 4\right)$

2 Calcula mediante la fórmula de la derivada de una potencia:

1. $f(x)=\frac{5}{x^5}$
2. $f(x)=\frac{5}{x^5}+\frac{3}{x^2}$
3. $f(x)=\sqrt{x}$
4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$
6. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$
7. $f(x)=\left(x^2+3x-2\right)^4$

3 Calcula mediante la fórmula de la derivada de una raíz:

1. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$
2. $f(x)=\sqrt[4]{x^5-x^3-2}$
3. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

4 Deriva las funciones exponenciales

1 $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$

2 $f(x) = e^{3-x^2}$

3 $f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

4 $f(x) = 3^{2x^2} \cdot \sqrt{x}$

5 $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

5 Calcula la derivada de las funciones logarítmicas:

1 $f(x)=\ln\left(2x^4-x^3+3x^2-3x\right)$

2 $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

3 $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

4 $f(x)=\ln\sqrt{x\,(1-x)}$

5 $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x}{x+2}}$