"TRABAJO TEÓRICO - PRÁCTICO" - LÍMITES I

INTRODUCCIÓN GRÁFICA A LOS LÍMITES DE FUNCIONES:

1)Comencemos con la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

¿Que pasa cuando x=1, es decir f(1)? _____. Sin embargo, la función está definida para cualquier otro número real.
Investiguemos los valores de la función cuando x se aproxima a 1, pero sin llegar a ser 1.

Tabla 1

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0.25	3.5
0.5	4
0.75	4.5
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

Tabla 2

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1.75	6.5
1.5	6.0
1.25	5.5
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

En las dos tablas a medida que x se aproxima a 1, f(x) se aproxima a _____ .

Observe que en las dos tablas conforme x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ se acerca más y más a 5; y cuanto más cerca esté x de 1, más cerca estará $f(x)$ de 5. Por ejemplo, de la tabla 1, cuando $x = 0.9$, $f(x) = 4.8$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.1, $f(x)$ es menor que 5 por 0.2. Cuando $x = 0.999$, $f(x) = 4.998$; es decir, cuando x es menor que 1 por 0.001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.002. Además, cuando $x = 0.9999$, $f(x) = 0.49998$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.0002.

La tabla 2, muestra que cuando $x = 1.1$, $f(x) = 5.2$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.1, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.2. Cuando $x = 1.001$, $f(x) = 5.002$; es decir, cuando x es mayor que 1 por 0.001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.002. Cuando $x = 1.0001$, $f(x) = 5.0002$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.0002.

Por tanto, de las dos tablas se observa que cuando x difiere de 1 por ± 0.001, (esto es $x = 0.999$ o $x = 1.001$), $f(x)$ difiere de 5 por ± 0.002 (es decir $f(x) = 4.998$ o $f(x) = 5.002$). Y cuando x difiere de 1 por ± 0.0001, $f(x)$ difiere de 5 por ± 0.0002.

Ahora, enfocando la situación desde otro punto de vista, se considerarán primero los valores de $f(x)$. Es posible hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cercanos a 5 como se desee, si se toman valores de x suficientemente cercanos a 1; esto es, $|f(x) - 5|$ puede hacerse tan pequeño como se desee hacien-

do $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño. Pero tenga presente que x nunca toma el valor 1.

Esta condición puede escribirse en forma más precisa empleando dos símbolos para las diferencias pequeñas. Los símbolos empleados usualmente son las letras griegas ϵ (épsilon) y δ (delta). De modo que se establece que para cualquier número positivo ϵ existe un número positivo δ, seleccionado adecuadamente, tal que si $|x - 1|$ es menor que δ y $|x - 1| \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), entonces $|f(x) - 5|$ es menor que ϵ. Es importante señalar que primero se elige ϵ y que el valor de δ depende del valor de ϵ. Otra forma de expresar esto es: proporcionado cualquier número positivo ϵ, puede lograrse que $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño; es decir, existe un número positivo δ lo suficientemente pequeño tal que

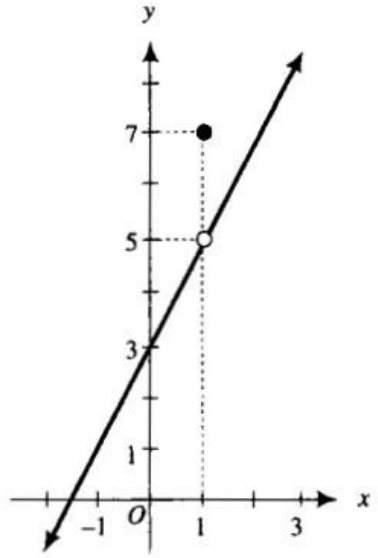
$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon$$

Bien, ahora fíjese que el numerador de la fracción se puede factorizar. Como lo haría? desarrolle. **Resultado f(x)=2x+3.**

Obs.: a esta ecuación le tenemos que agregar la condición de que x tiene que ser distinto de 1 por la función original. Finalmente nos queda.

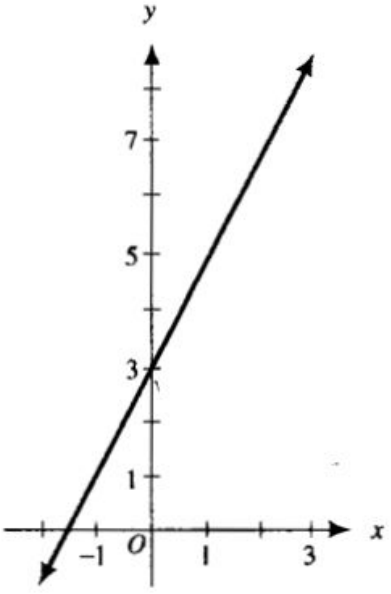
$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1$$

2)a) Ahora pensemos en la siguiente función:



$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cual es el valor del límite de g(x) cuando x tiende a 1? _____ .
Observemos que la gráfica de *g* consta de todos los puntos de la recta ***y=2x+3*** salvo en x=1.
b) Y si ahora analizamos la siguiente función:



$$h(x) = 2x + 3$$

Cual es el valor del límite de h(x) cuando x tiende a 1? _____ .

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y TEOREMAS DE LÍMITES

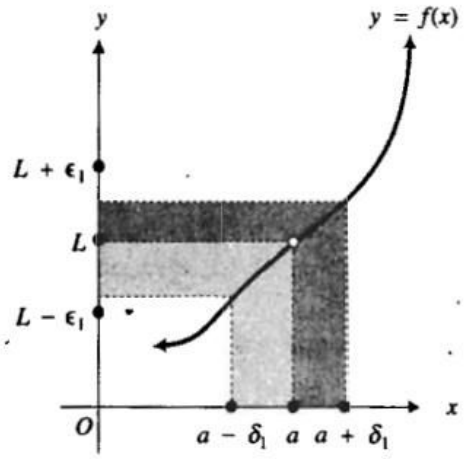
Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera:

dada cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$ **(1)**



En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

Observe que en la definición no se menciona nada acerca del valor de la función cuando $x = a$. Recuerde, como se señaló en la sección 1.4, la función f no necesita estar definida en a, para que el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista. Más aún, si f está definida en a, $\lim_{x \to a} f(x)$ puede existir sin que tenga el mismo valor que $f(a)$ como en el caso de la función del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.4.

3)a) TEOREMA 1: LÍMITE DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Resuelve aplicando el teorema:

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5)$$

_____

b) TEOREMA 2: LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

Si c es una constante, entonces para cualquier número a

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 0$ y $b = c$.

Resuelve aplicando el teorema:

$$\lim_{x \to 5} 7$$

_____

c) TEOREMA 3: LÍMITE DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Resuelve aplicando el teorema:

$$\lim_{x \to -6} x$$

_____

TEOREMA 4: LÍMITE DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE DOS FUNCIONES

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

TEOREMA 5:LÍMITE DE LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE ***n*** FUNCIONES

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, . . . , y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

TEOREMA 6: LÍMITE DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

TEOREMA 7: LÍMITE DEL PRODUCTO DE ***n*** FUNCIONES

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, . . . , y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

d) TEOREMA 8: LÍMITE DE LA ***n-ésima*** POTENCIA DE UNA FUNCIÓN

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

Resuelve aplicando el teorema.

$$\lim_{x \to -2} (5x + 7)^4$$

_____

e) TEOREMA 9: LÍMITE DEL COCIENTE DE DOS FUNCIONES

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

Resuelve aplicando el teorema:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1}$$

_____

f) TEOREMA 10:LÍMITE DE LA RAÍZ ***n-ésima*** DE UNA FUNCIÓN

Si n es un número entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

Resuelve aplicando el teorema:

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x + 1}}$$

TEOREMA 11:

TEOREMA 12:

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

4) Calcule los siguientes límites y cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 7x - 5)$$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

encuentre el $\lim_{x \to 2} f(x)$ y demuestre que $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$.
Dibuje la gráfica de f.

LÍMITES LATERALES

Hasta ahora, en el estudio del límite de una función conforme la variable independiente x tiende al número a, se han considerado valores de x cercanos a a, tanto mayores como menores que a; esto es, valores de x en un intervalo abierto que contenga a a, el cual no se considera como posible valor de x. Sin embargo, suponga que se tiene la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

Como $f(x)$ no existe si $x < 4$, entonces f no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a 4. De modo que $\lim_{x \to 4} \sqrt{x - 4}$ no tiene significado. Si, de cualquier forma, se restringe x a números mayores que 4, puede lograrse que el valor de $\sqrt{x - 4}$ esté tan cerca de 0 como se desee tomando valores de x suficientemente cercanos a 4 pero mayores que 4. En tal caso, x se aproxima a 4 por la derecha y se considera el *límite por la derecha* (o el *límite lateral derecho*), el cual se define a continuación.

DEFINICIÓN DE LÍMITE POR DERECHA

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (a, c). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Observe que en la última línea de la definición, no se colocaron barras de valor absoluto alrededor de $x - a$ ya que se consideran únicamente valores de x para los cuales $x > a$.

Al calcular, a partir de la definición, el límite de $\sqrt{x-4}$, conforme x tiende a 4 por la derecha, se tiene

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$$

Si, cuando se considera el límite de una función, la variable independiente x se restringe a números menores que a, se dice que x se aproxima a a por la izquierda. Este límite recibe el nombre de *límite por la izquierda* (o *límite lateral izquierdo*).

DEFINICIÓN DE LÍMITE POR IZQUIERDA

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (d, a). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L**, lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < a - x < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

EJEMPLO:

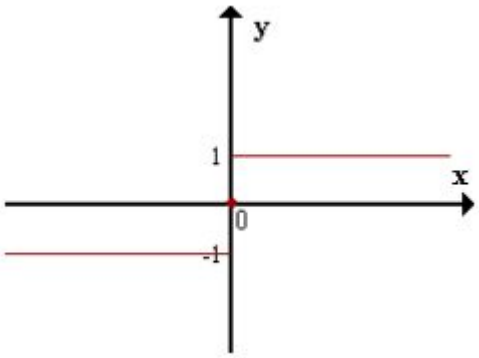
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Como $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$ y $\operatorname{sgn} x = 1$ si $0 < x$, se tiene

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Cual le parece que sería el valor del límite? _____

La gráfica correspondiente a esta función es:



TEOREMA:

El $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

"TRABAJO TEÓRICO - PRÁCTICO" - LÍMITES II

Calcular:

i)

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de g. (b) Determine $\lim_{x \to 0} g(x)$ si existe.

ii)

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$$

(a) Trace la gráfica de f y a partir de la gráfica haga una conjetura acerca de $\lim_{x \to 3} f(x)$. **(b)** Confirme analíticamente la conjetura del inciso (a).

LÍMITES INFINITOS

Pensemos en la siguiente función

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

Dominio de la función: _____
Imagen de la función: _____
Qué pasa con la f(x) cuando me acerco a 0 por derecha: _____
Qué pasa con las f(x) cuando me acerco a 0 por izquierda: _____

Completar la siguiente tabla le puede ayudar a responder,

x	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} =$$

Ahora aproxime x a 0 por la izquierda; en particular, considere para x los valores -1, -0.5, -0.25, -0.1, -0.01 y -0.001. Debido a la simetría con respecto al eje y, los valores de la función son los mismos que los correspondientes a los valores positivos de x. Así, otra vez, $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 a través de valores menores que 0, lo cual se expresa como

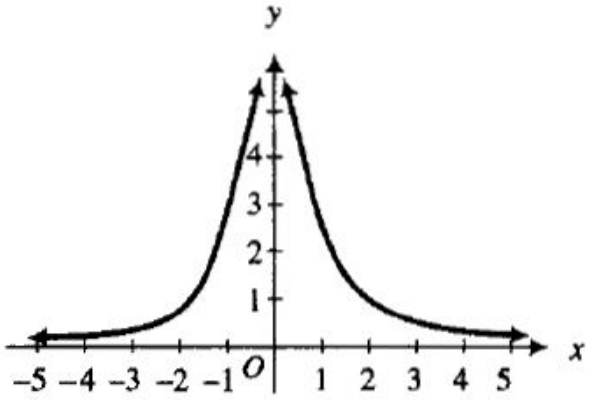
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2} =$$

Por tanto, conforme x se aproxima a 0 por la derecha o por la izquierda, $f(x)$ *crece sin límite*, lo que se expresa en símbolos como

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} =$$

V*ea la gráfica abajo y o*bserve que las dos "ramas" de la curva se acercan cada vez más al eje de las ***y*** conforme ***x*** se aproxima a 0.

Cómo llamamos al eje ***y*** en este caso:_____



$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

DEFINICIÓN DE VALORES DE FUNCIÓN QUE CRECEN SIN LÍMITE

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (1)$$

si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

De manera análoga, puede indicarse el comportamiento de una función cuyos valores *decrecen sin límite*. Para llegar a esto, considere la función g definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{-3}{x^2}$$

Los valores de esta función son los negativos de los valores de la función

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

De modo que para la función g, conforme x se aproxima a 0, por la derecha o por la izquierda, g(x) decrece sin límite lo que se escribe como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-3}{x^2} =$$

DEFINICIÓN DE VALORES DE FUNCIÓN QUE DECRECEN SIN LÍMITE:

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad (2)$$

si para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

TEOREMA 1:

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$;

(ii) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

TEOREMA 2:

Si a es cualquier número real y si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

TEOREMA 3:

(i) Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

TEOREMA 4:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

TEOREMA 5:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

RECUERDE LO QUE VIMOS EN CLASES!!!!

Límites indeterminados

Se llaman *límites indeterminados* a los que presentan alguna de estas formas:

$$\infty - \infty \; ; \; 0 \cdot \infty \; ; \; \frac{0}{0} \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \; ; \; \infty^0 \; ; \; 0^0 \text{ ó } 1^\infty$$

CALCULAR, EN CASO QUE EXISTAN, LOS SIGUIENTES LÍMITES

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^3+2} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}}.$$

CALCULAR ASÍNTOTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

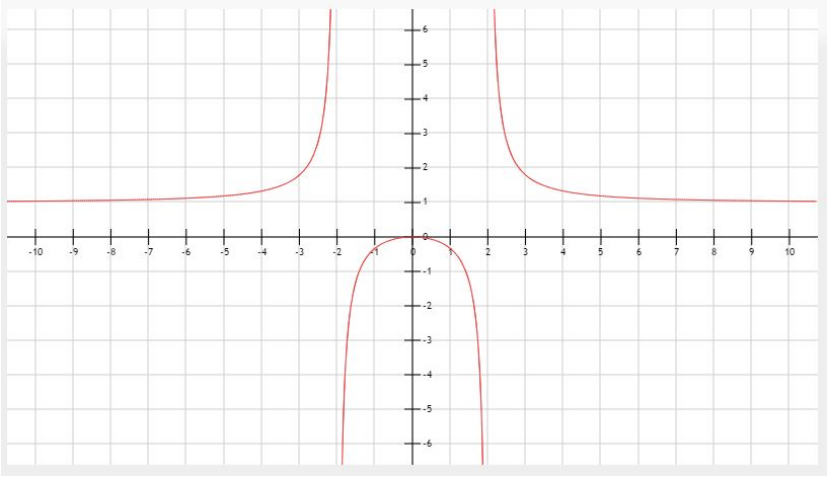
c) $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{4}{x^2-5x+6}$

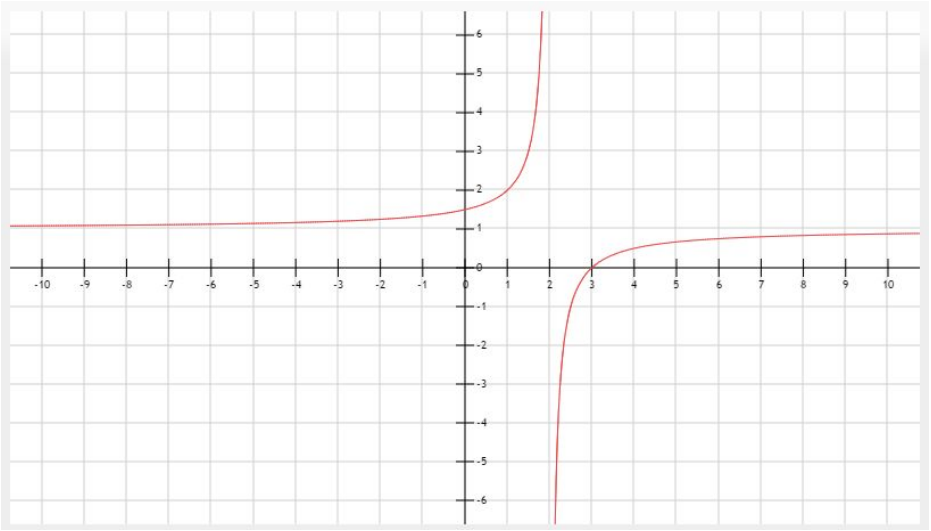
g) $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

Para su ayuda se presentan los gráficos de estas funciones,

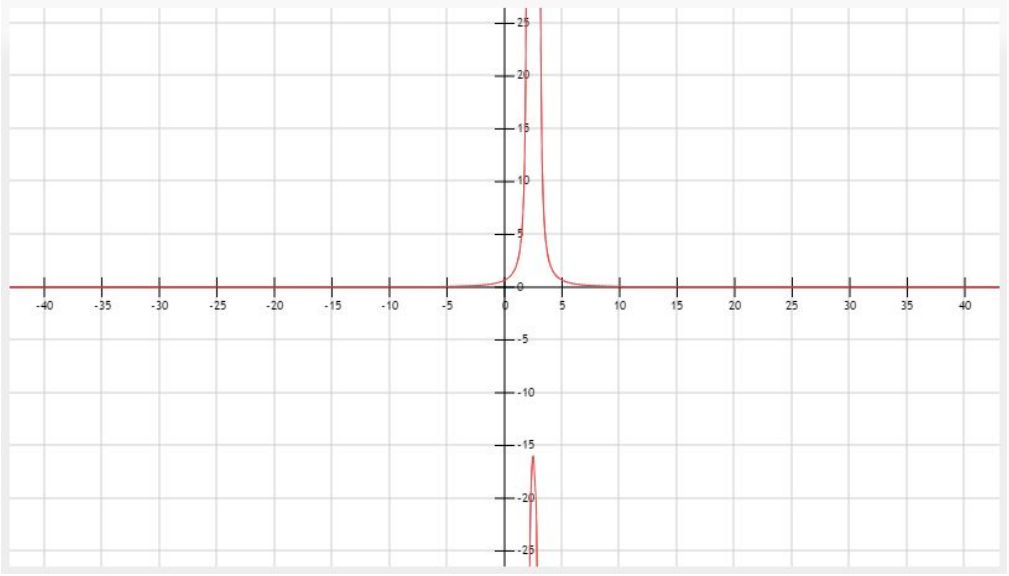
a)



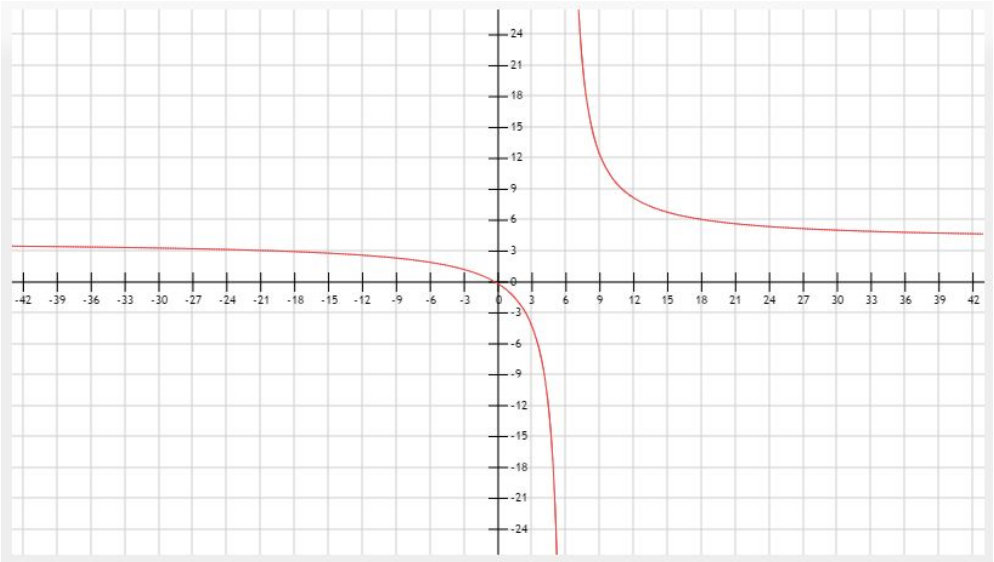
c)


-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6

e)


-40 -35 -30 -25 -20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20 25 30 35 40
25 20 15 10 5 0 -5 -10 -15 -20 -25

g)



CALCULAR LOS SIGUIENTES LÍMITES

e) $\lim_{x\to\infty} 5 - \frac{1}{x^2+1} =$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{10}-1}{10x^{11}-3} =$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+4}{5x^2+3x+14} =$

k) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+3x+4}{-x^2+4x-5} =$

"TRABAJO TEÓRICO - PRÁCTICO" - CONTINUIDAD

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA EN UN NÚMERO

Se dice que la función f es **continua** en el número a si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;
(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;
(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

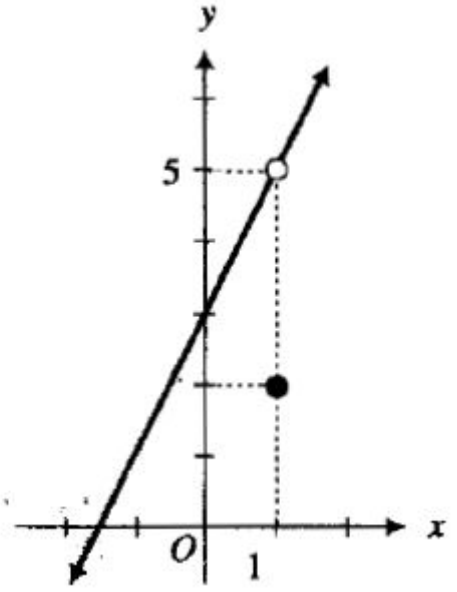
Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es **discontinua** en a.

Veamos un ejemplo,

Sea f la función definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

su gráfica,



La gráfica de esta función se rompe en el punto x=1, por lo que se investigaran en ese punto las condiciones de la "DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA EN UN NÚMERO".

(i) $f(1) = 2$
(ii) $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$
(iii) $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

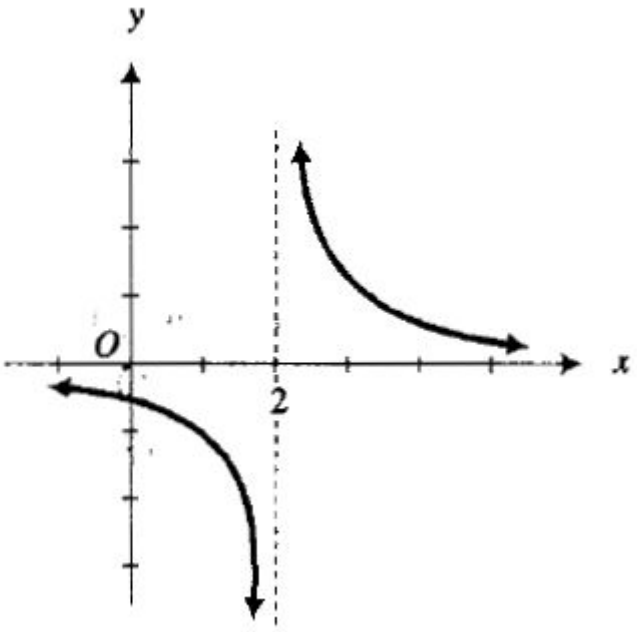
Las condiciones (i) y (ii) se satisfacen pero la condición (iii) no se cumple. Por tanto, la función f es discontinua en 1. ◀

Dicha discontinuidad es una **discontinuidad removible** (o **eliminable**) porque si f se redefine en a de modo que $f(a)$ es igual a $\lim_{x \to a} f(x)$, la nueva función es continua en a. Si la discontinuidad no es removible, entonces se le llama **discontinuidad esencial.**

Veamos otra función,

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

su gráfica,



la gráfica de esta función se rompe en el punto x=2. Por lo tanto evalúe las condiciones de la "DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA EN UN NÚMERO".

i)

_____

ii)

_____

iii)_____
_

Obs.: La discontinuidad de esta función recibe el nombre de discontinuidad infinita.

Evalúe continuidad de la siguiente función. Grafique.

$$h(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

TEOREMA

Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

(i) $f + g$ es continua en a;
(ii) $f - g$ es continua en a;
(iii) $f \cdot g$ es continua en a;
(iv) f/g es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

TEOREMA

Una función polinomial es continua en todo número.

TEOREMA

Una función racional es continua en todo número de su dominio.

Demostración Si f es una función racional entonces se puede expresar como el cociente de dos funciones polinomiales. De modo que f se puede definir por

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

donde g y h son dos funciones polinomiales, y el dominio de f consta de todos los números reales excepto aquellos para los que $h(x) = 0$.

…

TEOREMA

Si n es un número entero positivo y

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

entonces

(i) si n es impar, entonces f es continua en todo número,
(ii) si n es par, entonces f es continua en todo número positivo.

TEOREMA

Si $\lim_{x \to a} g(x) = b$ y si la función f es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$